

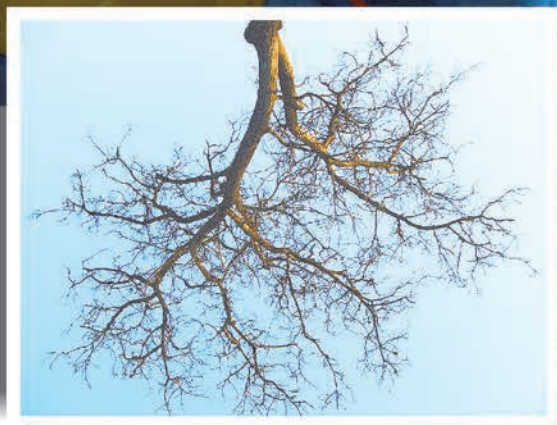
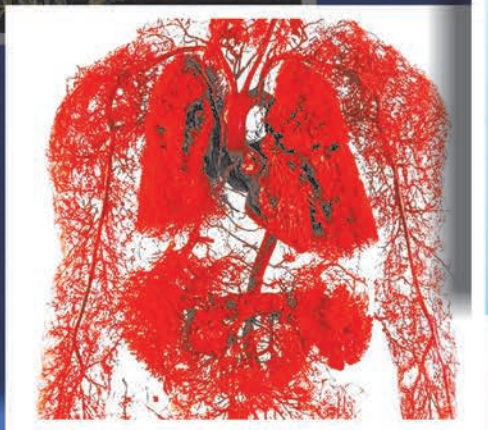
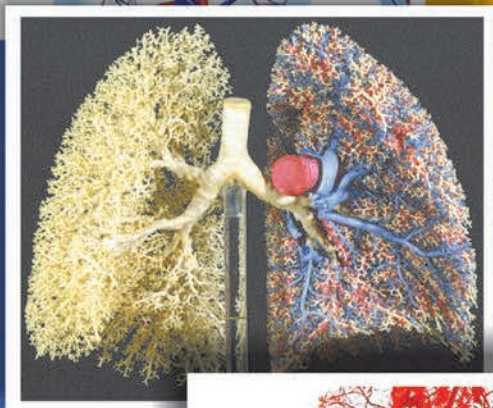
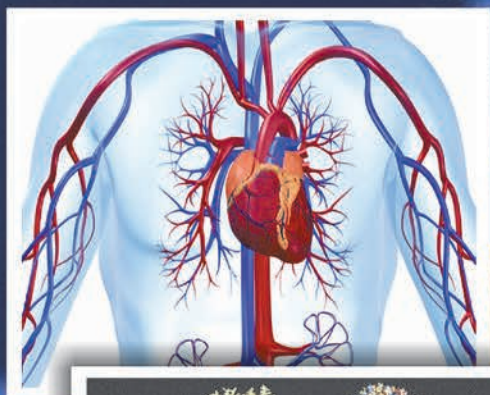
МАРТ

ISSN 0130-2221

2018 · № 3

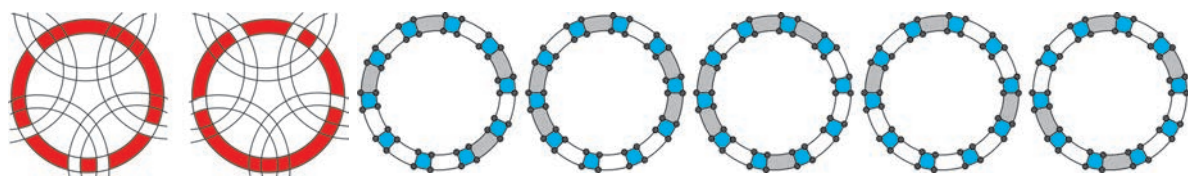
КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





XII - МОСКВА · 1985



Этой головоломке больше 30 лет. Она была выпущена среди многочисленной сувенирной продукции XII Всемирного фестиваля молодежи и студентов, проходившего в Москве летом 1985 года. Форма и устройство головоломки были явно вдохновлены эмблемой этого фестиваля.

Головоломка состоит из шести колец, уложенных в форме цветка. Пять колец имеют внешний диаметр 4,2 см и внутренний диаметр 3,5 см. Центральное кольцо чуть больше: его внешний диаметр 4,7 см, а внутренний – 3,9 см. В кольцах проделаны пазы: часть с одной стороны, часть – с другой. Глубина пазов равна половине толщины колец, что позволяет уложить все кольца плоско, совмещая пазы. Расположение пазов показано на рисунках. Серый цвет обозначает, что паз находится на верхней стороне кольца, а белый – что паз на другой стороне. Схема центрального кольца (красное на рисунках) понятна из рисунка. Видно, что обратная сторона этого кольца получается из передней поворотом.

Если взяться за центральное кольцо и поднять головоломку, то кольца перепутаются. Собрать обратно исходную фигуру – цветок – очень непросто. В инструкции к головоломке сказано, что задача имеет только два решения. Желаем успеха в их поиске!

В.Журавлев

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Скейлинги в биологии. *А.Минеев*
10 Остроугольные множества. *А.Райгородский*

НОВОСТИ НАУКИ

- 14 Рождение гравитационно-волновой
астрономии. *Л.Белоухов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи M2502–M2505, Ф2509–Ф2512
20 Решения задач M2490–M2492, Ф2497–Ф2500
24 Как разрезать сыр? *А.Толпыго*

КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

- 28 Задачи 25–28

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи
30 Канатоход Толи Втулкина. *С.Дворянинов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Полуправильные замощения плоскости

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Двое на наклонной плоскости. *В.Жбанов,*
А.Стасенко

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 Что трансформирует трансформатор?
С.Варламов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 40 Доказать делимость поможет комбинаторика
(окончание). *А.Канунников*

ОЛИМПИАДЫ

- 44 Региональный этап XLIV Всероссийской
олимпиады школьников по математике
46 Региональный этап LII Всероссийской
олимпиады школьников по физике
51 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей! (13, 28)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Минеева*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой (по материалам*
В.Птушенко)

Скейлинги в биологии

А.МИНЕЕВ

В ПОСЛЕДНЕЕ ВРЕМЯ ПРОИСХОДЯТ важные изменения в осмыслении огромной базы накопленной биологической информации. Постепенно становится понятной природа ряда эмпирических соотношений (иначе называемых скейлингами) для живых организмов. Оказалось, что эти соотношения естественно следуют из представлений о сосудистой разветвленной структуре кровеносной и дыхательной систем организма.

Что такое скейлинг

Скейлингом (от англ. scaling – масштабное преобразование) называют степенную зависимость какой-либо функции от параметров. В биологии в качестве параметра часто используется масса тела, само масштабирование называют аллометрией, а скей-

линг зависимости от массы тела записывают в виде

$$Y = Y_0 M_T^b,$$

где M_T – масса тела, b и Y_0 – параметры масштабирования.

Примером скейлинга такого типа является зависимость интенсивности метаболизма P , т.е. поглощаемой или выделяемой организмом мощности (в ваттах) от массы тела (в килограммах):

$$P \approx 3M_T^{3/4}.$$

Такая зависимость прослеживается для всех млекопитающих, различающихся по массе на много порядков. На рисунке 1 приведен подробный вариант кривой «от мыши до слона».

Если тело однородно (без внутренней структуры), то имеет место закон «треть-

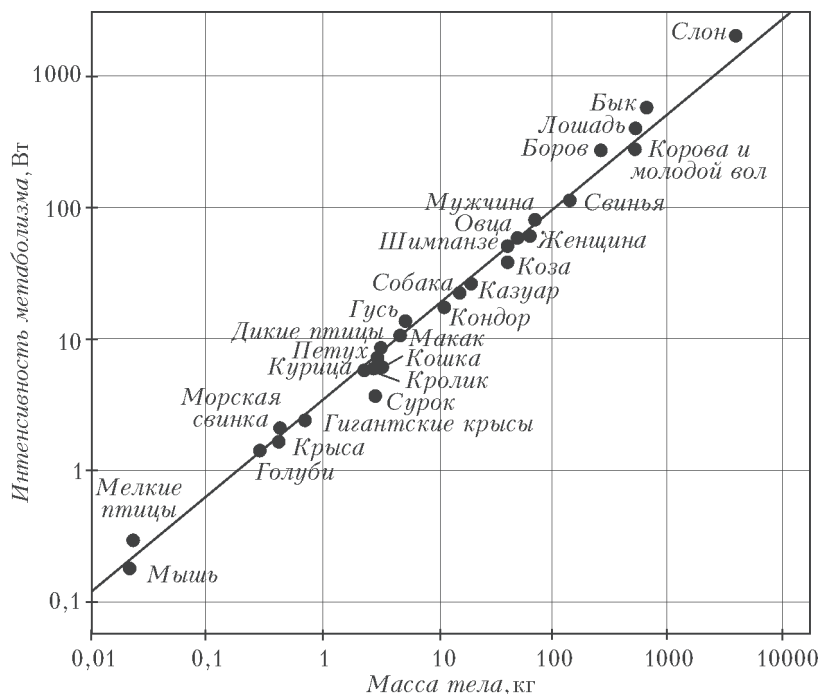


Рис. 1. Зависимость мощности метаболизма от массы тела для млекопитающих

их долей». Так, для однородного тела ожидается, что интенсивность метаболизма P , а с ним и теплоотвод пропорциональны площади тела S , в то время как масса тела M_T пропорциональна объему V_T . Отсюда получаем скейлинг для мощности метаболизма в виде

$$P \sim S \sim V_T^{2/3} \sim M_T^{2/3}.$$

В то же время реальная зависимость несколько отличается:

$$P \sim M_T^{3/4}.$$

Это соотношение является примером закона «четвертых долей», выполняющегося для большинства биологических явлений. В этом случае закон масштабирования можно представить в виде

$$b = (\text{целое число}) \times \frac{1}{4}.$$

Так, интенсивность метаболизма меняется с массой как $M_T^{3/4}$, площадь сердечной аорты пропорциональна $M_T^{3/4}$, продолжительность жизни организма пропорциональна $M_T^{1/4}$, длительность сердечного цикла млекопитающих масштабируется как $M_T^{-1/4}$ и т.д.

Особенность биологических объектов состоит в наличии *внутренней структуры*. Она связана с необходимостью распределения вдыхаемого кислорода по различным частям организма, в которых и протекают реакции окисления с выделением энергии. Попробуем выяснить, какой простейший тип структуры может привести к закону «четвертых долей».

Разветвляющиеся структуры – фракталы

Примем, что провод энергии внутри тела к клеткам осуществляется с помощью разветвляющихся структур. Такими структурами в организме животных являются *дыхательная система* и *кровеносная система*. Дыхательная система отвечает, в частности, за поступление кислорода – основного поставщика энергии при реакциях окисления. В кровеносной системе кислород связывается эритроцитами и разносится с кровью по организму.

Будем проводить оценки на модели кровеносной системы, следуя работам группы американских ученых (G.B. West, J.H. Brown, B.J. Enquist; см. список литературы в конце статьи). В ней происходит постепенное разветвление сети кровеносных сосудов – от аорты к капиллярам. Для простоты будем полагать, что кровеносные сосуды являются *жесткими* трубочками, которые проходят N поколений разветвления на n более мелких трубочек (рис.2; здесь $n = 2$). Обозначим радиус сосуда на k -й генерации через r_k , а длину – через l_k . Примем также, что как дыха-

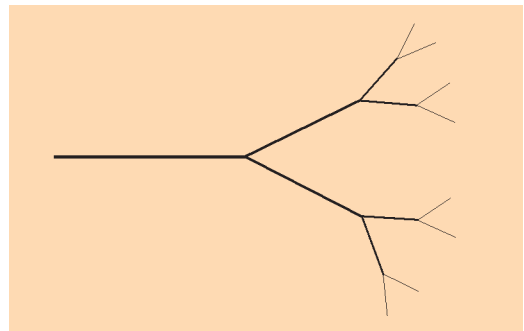


Рис. 2. Процесс разветвления сосудистой системы (показаны первые три ветвления)

тельная, так и кровеносная системы обладают *фрактальными* свойствами, т.е. подобием при разветвлении. А именно, имеет место следующая связь между радиусами и длинами сосудов на соседних генерациях:

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = n^{-1/2}, \quad \frac{l_{k+1}}{l_k} = n^{-1/3}.$$

Первое соотношение следует из закона сохранения площади сосудов:

$$\pi r_k^2 = n \pi r_{k+1}^2,$$

а второе – из более сложного закона сохранения «зоны обслуживания» кровеносного сосуда, пропорциональной характерному объему (его называют «пространственно заполненным фракталом»):

$$\frac{4}{3} \pi l_k^3 = \frac{4}{3} n \pi l_{k+1}^3.$$

Полученных соотношений в принципе уже достаточно для того, чтобы сделать некоторые выводы. Однако в то время как

для математика процесс разветвления может быть формально бесконечным, физик и биолог обязаны принять во внимание то, что у этого процесса есть начало и есть конец.

В частности, у биологических объектов имеется наименьший размер, до которого возможно ветвление, масштаба размера клетки $d_c \sim 10$ микрон (10^{-5} м). Действительно, кровеносных сосудов с диаметром, существенно меньшим d_c , не существует, а диаметр наиболее мелких сосудов (капилляров) составляет 5–10 микрон. Подобная оценка минимальных размеров имеет место и в случае дыхательной системы.

Максимальный размер, естественно, также ограничен. Для кровеносной системы он связан с размерами сердца млекопитающего, для дыхательной системы – с размером горла.

Инварианты

Отметим важнейшим свойством всего живого тот факт, что на последнем уровне ветвления параметры сосудистой системы являются *инвариантами*, т.е. не зависят от массы живого организма.

Если обозначить радиус кровеносного сосуда с минимальным размером (капилляра) через r_c , его длину – через l_c и скорость движения крови по этим сосудам – через u_c , то эти величины одинаковы как для мыши, так и для слона. Это можно записать так:

$$r_c \sim M_T^0, \quad l_c \sim M_T^0, \quad u_c \sim M_T^0.$$

Приведем (несколько округляя) значения этих инвариантов:

$$r_c \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 5 \text{ мкм},$$

$$l_c \approx 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм},$$

$$u_c \approx 10^{-3} \text{ м/с} = 1 \text{ мм/с}.$$

Кроме того, инвариантом является также и перепад давления Δp по капилляру, который выражается через параметры r_c , l_c и u_c :

$$\Delta p = \frac{8\mu u_c l_c}{r_c^2} \sim 10^3 \text{ Па},$$

где $\mu = (4-5) \cdot 10^{-3}$ Па·с – вязкость крови.

Примеры скейлингов для млекопитающих

а) *Полный объем крови в организме.* Он складывается из объема крови во всех сосудах:

$$V = \sum_{k=0}^N \pi r_k^2 l_k N_k,$$

где N_k – количество сосудов на k -м разветвлении. Легко показать, что $N_k = n^k$, а для последнего, N -го разветвления количество таких самых тонких капилляров составляет $N_c = n^N$. Из соотношений между радиусами и длинами сосудов на соседних генерациях можно получить

$$r_k = \frac{r_0}{n^{k/2}}, \quad l_k = \frac{l_0}{n^{k/3}},$$

где r_0 и l_0 – радиус и длина максимального сосуда (аорты), и выразить полный объем крови через объем аорты V_0 :

$$V = V_0 \cdot \sum_{k=0}^N s^k.$$

Здесь $V_0 = \pi r_0^2 l_0$ – объем аорты и $s = n^{-1/3}$. При суммировании воспользуемся тождеством

$$1 - s^{N+1} = (1-s)(1 + s + s^2 + \dots + s^N)$$

и, поскольку $s < 1$, а полное количество разветвлений $N \gg 1$ (для человека $N \sim 30$), получим, пренебрегая величиной s^{N+1} ,

$$V = \frac{V_0}{1-s} = \frac{V_0}{1-n^{-1/3}} \approx 4,85V_0,$$

т.е. полный объем крови всего в несколько раз превышает объем крови в аорте. Если связать объем аорты с объемом капилляра:

$$V_0 = \pi r_c^2 l_c N_c^{4/3} = V_c N_c^{4/3},$$

то оказывается, что полный объем крови меняется как количество капилляров в степени $4/3$:

$$V = \frac{V_c}{1-n^{-1/3}} N_c^{4/3} \sim 5V_c N_c^{4/3}.$$

б) *Полный поток крови по сосудам.* Закон сохранения потока крови dQ/dt

должен выполняться на каждом уровне ветвления, поэтому можно записать

$$\frac{dQ}{dt} = \pi r_0^2 u_0 = \pi r_k^2 u_k N_k = \dots = \pi r_c^2 u_c N_c.$$

Поскольку снабжение организма энергией осуществляется за счет содержащегося в крови кислорода, то получим, что мощность метаболизма пропорциональна потоку крови, т.е. полному количеству капилляров:

$$P \sim \frac{dQ}{dt} \sim N_c.$$

в) *Связь между массой крови и объемом тела.* Объем, а значит и масса, крови прямо пропорционален массе тела:

$$V \sim M_{кр} \sim M_T.$$

Это соотношение прямо следует из принципа минимума энергии, однако вывод его несколько сложен и поэтому здесь не приводится. Оно хорошо соответствует данным наблюдений: для всех млекопитающих масса циркулирующей крови составляет 5% от массы тела:

$$\frac{M_{кр}}{M_T} = 0,05 = 5\%.$$

Отметим, что подобная пропорциональность имеет место и для дыхательной системы – масса легких пропорциональна массе тела:

$$\frac{M_{л}}{M_T} = 0,011 = 1,1\%.$$

В результате получает объяснение природа большинства зоологических постоянных. В частности, постоянство отношения массы крови к массе тела, массы сердца к массе тела и т.д.

г) *Мощность метаболизма.* Теперь мы вплотную приблизились к главной цели – определению связи между мощностью метаболизма и массой тела животных, т.е. к искомому закону «трех четвертых»:

$$P \sim N_c \sim V^{3/4} \sim M_T^{3/4}.$$

д) *Давление, необходимое для прокачки крови.* Вязкость крови приводит к потерям давления при прокачке по сосудам. Сопротивление R_k , связанное с вязкостью, для отдельной трубочки может быть вычис-

лено по формуле

$$R_k = \frac{8\mu l_k}{\pi r_k^4}.$$

А для сети кровеносных сосудов, включающей как последовательные, так и параллельные элементы (см. рис.2), полное сопротивление R_Σ можно записать в виде

$$R_\Sigma = \sum_{k=0}^N \frac{R_k}{N_k} = \sum_{k=0}^N \frac{8\mu l_k}{\pi r_k^4 n^k}.$$

После несложных преобразований с использованием соотношений

$$r_c = \frac{r_0}{N_c^{1/2}}, \quad l_c = \frac{l_0}{N_c^{1/3}}$$

получим

$$R_\Sigma = \frac{R_c}{N_c} \frac{1}{1 - n^{-2/3}} \approx 2,7 \frac{R_c}{N_c}.$$

Видно, что потери давления на прокачку сквозь сеть кровеносных сосудов не зависят от массы тела: поскольку $dQ/dt \sim N_c$, то

$$\Delta p_0 = R_\Sigma \frac{dQ}{dt} \sim M_T^0.$$

И действительно, для всех млекопитающих артериальное давление крови масштаба 100 мм рт. ст., или $1,3 \cdot 10^4$ Па.

е) *Сопутствующие скейлинги.* Казалось бы, изложенная выше модель слишком проста. Так, кровеносные сосуды представлены в виде жестких трубок, в то время как кровь в реальных сосудах пульсирует, сосуды периодически расширяются и сужаются и т.д. Однако более подробный анализ показал, что учет этих эффектов не изменяет конечных выводов. Можно сказать, что учитывались только ламинарные (спокойные) течения, для которых справедливы написанные выше соотношения. Но в сосудистой системе кровь и не должна переходить в хаотический, турбулентный режим – это одно из основных условий нормальной работы сердца.

Оказалось, что, кроме предсказания верного закона для мощности метаболизма, постоянства перепада артериального давления у разных животных и пропорциональности массы крови и легких массе тела, возможна формулировка и некото-

рых других законов масштабирования, выполняющихся в природе. Приведем примеры еще нескольких скейлингов, которые естественно следуют из модели.

- Поскольку *радиус аорты* r_0 меняется как $r_0 \sim N_c^{1/2}$, а количество капилляров $N_c \sim M_T^{3/4}$, то

$$r_0 \sim M_T^{3/8}.$$

- Поток крови $dQ/dt = \pi r_0^2 u_0$ пропорционален $M_T^{3/4}$, а радиус аорты r_0 пропорционален $M_T^{3/8}$, поэтому *скорость крови по аорте* у разных млекопитающих одинакова:

$$u_0 \sim M_T^0.$$

- *Время циркуляции крови* t можно определить, поделив объем крови на поток:

$$t = \frac{V}{dQ/dt} = \frac{l_0}{u_0}.$$

Поскольку u_0 не зависит от массы, то

$$t \sim l_0 \sim M_T^{1/4}.$$

- Количество капилляров

$$N_c \sim M_T^{3/4},$$

что непосредственно следует из полученного ранее выражения для мощности метаболизма.

Результаты сопоставления модели с данными наблюдений приведены в таблице скейлингов для животных. Как видно из этой таблицы, для указанных параметров наблюдается довольно хорошее соответствие предсказаний модели с опытными данными.

А что для деревьев?

У животных диаметр сосудов уменьшается от аорты к капилляру (кровеносная

Скейлинги для животных

	Показатель степени при массе тела M_T	
	Модель	Наблюдения
<i>Кровеносная система</i>		
Аорта		
Радиус r_0	$3/8 = 0,375$	0,36
Длина l_0	$1/4 = 0,25$	не определялась
Перепад давления Δp_0	0	0,032
Скорость движения крови u_0	0	0,07
Общие параметры		
Количество капилляров N_c	$3/4 = 0,75$	
Объем крови в организме V	1	1,00
Время циркуляции крови t	$1/4 = 0,25$	0,25
Мощность метаболизма P	$3/4 = 0,75$	0,74
<i>Дыхательная система</i>		
Трахея		
Радиус	$3/8 = 0,375$	0,39
Перепад давления	0	0,004
Скорость движения воздуха	0	0,02
Общие параметры		
Количество альвеол	$1/4 = 0,25$	нет данных
Диссипируемая мощность	$3/4 = 0,75$	0,78
Скорость потребления кислорода	$3/4 = 0,75$	0,76

система) и от трахеи к альвеоле (дыхательная система). Основное отличие сосудистой системы деревьев (при некотором внешнем сходстве) состоит в том, что диаметр сосудов дерева от корней по стволу до листьев примерно одинаков (рис.3). Действительно, водопроводящая система

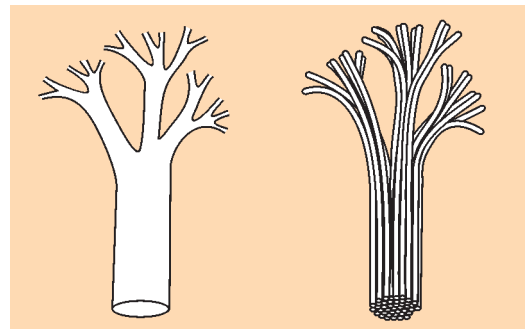


Рис. 3. Отличие в строении сосудистой системы у млекопитающих (слева) и деревьев (справа)

деревьев использует в качестве сосудов полые каналы, образованные из одревесневших клеток камбия. И от основания дерева до его вершины сосуд фактически образует единый тонкий канал. Поэтому, в частности, уровень давлений, необходимых для подъема воды к листьям, существенно больше, чем при прокачке крови в организме животных, и составляет десятки атмосфер.

О каком уровне перепада давлений идет речь? Перепад давлений у высоких деревьев, высотой $h \sim 100 - 150$ м, составляет $\Delta p_d \approx 20 - 30$ атм. Такой же уровень давлений в клетках растений болот, а на засоленных почвах он может достигать и 100 атм. Таким образом, в сосудистой системе высоких деревьев перепад давлений может быть в сотни раз больше, чем в системе сосудов животных.

Начнем с обсуждения такого вопроса: могут ли обеспечить такой перепад капиллярные явления или осмос?

С капиллярными явлениями каждый из вас, конечно, встречался. Простейшим примером является впитывание тряпкой воды при уборке помещений. Проведем такой опыт: держа промокашку в руках, опустим ее кончик в воду или чернила и проследим за распространением волны намочения. Достигнув определенной высоты подъема жидкости, этот процесс остановится. Высота подъема жидкости связана с ее свойствами и с характерным размером структуры волокон промокательной бумаги.

Количественную оценку капиллярных сил, или, иначе, сил поверхностного натяжения, можно получить, определив высоту подъема воды h в капилляре диаметром d с хорошо смачиваемыми стенками. Приравняв силу поверхностного натяжения $\pi d \sigma$ силе тяжести столба воды $\rho g \pi d^2 h / 4$, получим

$$h \approx \frac{4\sigma}{\rho g d}.$$

При значении коэффициента поверхностного натяжения для воды $\sigma \approx 0,07$ Н/м и диаметре сосуда $d \approx 10^{-5}$ м (это минимальный масштаб размеров сосудов в теле

животных и в растениях) это дает $h \approx 3$ м. Соответствующее давление составляет

$$p_{\text{кап}} = \rho g h \approx 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 0,3 \text{ атм.}$$

Видно, что поскольку величина капиллярного подъема воды существенно ниже высоты больших деревьев, $3 \text{ м} \ll 100 \text{ м}$, то капиллярные силы не могут играть основной роли в подъеме воды наверх дерева.

Осмотические силы проявляются в случае, когда две разные жидкости разделены полунепроницаемой перегородкой, которая хорошо пропускает молекулы одной из жидкостей, скажем воды, и непроницаема для молекул другой жидкости, например поваренной соли NaCl. В этом случае спустя некоторое время давление молекул воды по обе стороны перегородки уравнивается, а соударения с перегородкой молекул NaCl создадут избыточное давление, называемое осмотическим давлением $p_{\text{осм}}$.

Если использовать эту информацию применительно к деревьям, то в них элементарной осмотической ячейкой является клетка, которая может обмениваться с другими клетками и почвой. Концентрированный клеточный сок содержится в вакуолях, занимающих до 80% объема клетки. Вакуоль, как и сама клетка, окружена перегородкой – мембраной, которая хорошо пропускает молекулы воды и плохо пропускает более крупные молекулы.

Величину осмотического давления, создаваемого этими более крупными молекулами, можно определить по известной формуле Менделеева–Клапейрона

$$p_{\text{осм}} \approx nkT,$$

где n – концентрация молекул, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – температура. В качестве примера оценки давления, связанного с осмосом, примем, что в 100 г воды растворена ложка поваренной соли – примерно 10 г. Если этот объем закрыт полунепроницаемой стенкой и контактирует с дистиллированной водой, то через некоторое время установится осмотическое давление, стремящееся разорвать наш объем. Так как моль NaCl (78,5 г) содержит число Аво-

гадро молекул ($6 \cdot 10^{23}$), то концентрация NaCl составляет

$$n \approx \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 10 \text{ г}}{78,5 \text{ г} \cdot 100 \text{ г}/10^6 \text{ г}/\text{м}^3} \approx 8 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}.$$

При комнатной температуре $T \approx 300 \text{ К}$ это соответствует осмотическому давлению

$$p_{\text{осм}} \approx 30 \text{ атм.}$$

Измеренные в реальных растениях значения осмотического давления действительно составляют десятки атмосфер. Этого уже достаточно для подъема и прокачки воды по стволам высоких деревьев.

Таким образом, осмотическое давление может служить одним из основных двигателей воды в деревьях, который называется *нижним концевым двигателем*, как бы толкающим воду снизу дерева наверх. Ранней весной, когда концентрация клеточного сока в вакуолях максимальна, это может обеспечить подъем воды к верхушкам деревьев. Ближе к лету концентрация клеточного сока в вакуолях уменьшается. На смену нижнему приходит *верхний концевой двигатель*, связанный с испарением воды с открытой поверхности листьев. Это приводит к появлению своеобразной присасывающей силы. Фактически вода через листья «выкачивается» с помощью сосудов ствола и корней из почвы. В действие этот механизм запускает солнечное излучение. За счет испарения воды листьями температура листьев остается примерно постоянной даже в жаркую погоду. Взаимодействие верхнего и нижнего концевых двигателей обеспечивает в деревьях надежный подъем воды вверх. Как дают оценки, скорость подъема воды по сосудам деревьев достигает миллиметров в секунду (у некоторых лиственных деревьев – до $10 \text{ мм}/\text{с}$). В результате время движения воды по стволу высокого дерева ($h \approx 100 \text{ м}$) измеряется несколькими часами для случая лиственных деревьев и существенно больше – для хвойных.

Оценки, подобные проведенным для кровеносной системы животных, дают в случае сосудистой системы деревьев следующую зависимость высоты дерева от его

массы M_d :

$$h \sim M_d^{1/4}.$$

Это объясняет медленный рост дерева со временем. Так, если дерево достигло высоты 50 метров к 50 годам, то 100-метровый рубеж оно преодолит к 800 годам, а 150-метровый – только через 4000 лет...

Обобщения модели

Модель, авторы которой West, Brown и Enquist, сокращенно WBE-модель, получила распространение и была применена к описанию широкого круга биологических явлений. Основные положения модели неоднократно подвергались критике. Тем не менее, в целом она устояла. Однако оказалось, что модель сохраняет предсказательную силу и в существенно более общей постановке.

Первым подверглось критике представление о сосудах как о наборе жестких трубочек. Оказалось, что такие явления, как пульсации в кровеносных сосудах, не приводят к изменению вида скейлингов.

Далее пришел черед ревизии предположения о фрактальном характере ветвления:

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = n^{-1/2}$$

с одинаковым для всех генераций ветвления показателем n . Фактически это был отказ от требования фрактальности и замена его просто на необходимость ветвления с переменным значением параметра ветвления n_k .

Но в работах авторов модели показано, что отказ от постоянства параметра n (переход к разным значениям количества разветвлений на разных генерациях, $n_k \neq \text{const}$; рис.4,

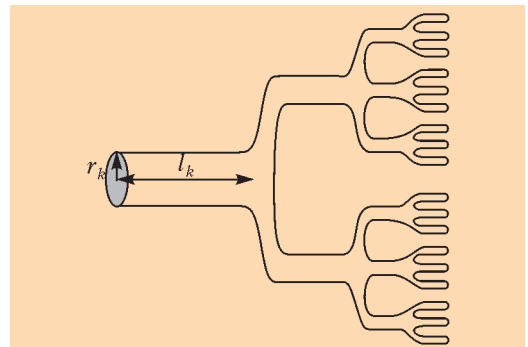


Рис. 4. Вариант разбиения на две и три ветви

где ветвление происходит то на две, то на три ветви) также не приводит к изменению закона «трех четвертей».

Но наибольшее количество «претензий» накопилось к принятому в WBE-модели предположению о «пространственной заполненности»: $\frac{l_{k+1}}{l_k} = n^{-1/3}$, следующему из закона сохранения «зоны обслуживания» сосуда (рис.5). Это соотношение очень важно с точки зрения связи сосудов с клетками: оно в итоге позволяет «донести» энергию до каждой клетки.

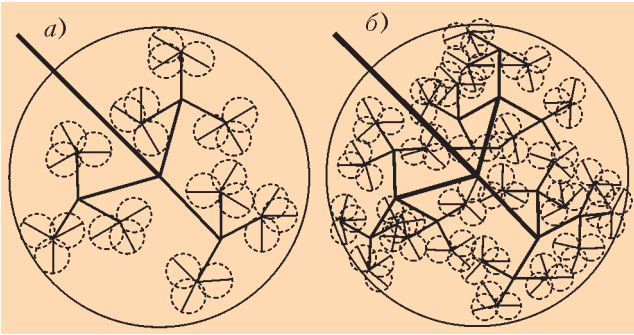


Рис. 5. Иллюстрация «пространственной заполненности» для уровней k (а) и $k + 1$ (б)

В WBE-модели предположения о фрактальном характере ветвления и о «пространственной заполненности» считались естественными: они минимизировали гид-

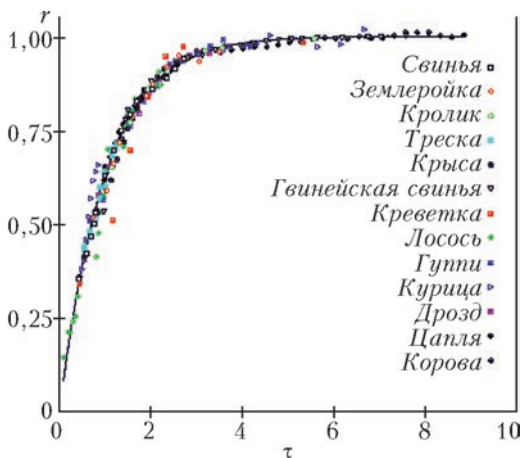


Рис. 6. Зависимость (безразмерной) массы тела млекопитающих от (безразмерного) времени

равлическое сопротивление при течении жидкости по разветвляющимся сосудам и приводили к оптимуму энергетических затрат на прокачку.

Одно из самых интересных и необычных следствий WBE-модели – получение единой зависимости массы тела животных от времени: от рождения до взрослого состояния. Она имеет вид

$$r = 1 - e^{-\tau},$$

где $r = \left(\frac{m(t)}{M}\right)^{1/4}$ – безразмерная масса тела, $\tau = \frac{at}{4M^{1/4}} - \ln\left(1 - \left(\frac{m_0}{M}\right)^{1/4}\right)$ – безразмерное время, m_0 – масса новорожденного, a – постоянная для данного животного величина. Рисунок 6 наглядно иллюстрирует эту зависимость.

Литература

1. К.Шмидт-Нюельсен. Размеры животных: почему они так важны? – М.: Мир, 1987.
2. G.B. West, J.H. Brown. Life's Universal Scaling Laws. – Physics Today, Sept., 2004.
3. П.И.Безuin, Ю.А.Шукейло. Биомеханика. – СПб.: Политехника, 2000.
4. G.B. West, J.H. Brown, B.J. Enquist. A General model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology. – Science, 1997, v.276.
5. G.B. West, J.H. Brown, B.J. Enquist. A general model for the structure and allometry of plant vascular systems. – Nature, 1999, v.400.
6. R.S. Etienne, M.E.F. Apol, H. Olf. Demystifying the West, Brown & Enquist model of the allometry of metabolism. – Functional Ecology, 2006, v.20.
7. M.E.F. Apol, R.S. Etienne, H. Olf. Revisiting the evolutionary origin of allometric metabolic scaling in biology. – Functional Ecology, 2008, v.22.
8. G.B. West, J.H. Brown, B.J. Enquist. A General model for ontogenetic growth. – Nature, 2001, v.413.

Остроугольные множества

А. РАЙГОРОДСКИЙ

Что такое остроугольное множество?

Пусть X – множество точек на плоскости. Назовем его *остроугольным*, если любые три его точки образуют остроугольный треугольник. Иными словами, в X нет ни прямых, ни тем более тупых углов. Отметим также, что в X никакие три точки не могут лежать на одной прямой, иначе они бы не образовывали треугольника.

Вопрос: а много ли может быть точек в остроугольном множестве на плоскости? Легко сообразить, каков ответ. Конечно, в X может быть три точки. Однако уже любые 4 точки на плоскости неизбежно порождают прямой или тупой угол. Это совсем простое упражнение.

Получается, что на плоскости остроугольные множества устроены тривиально. Ладно, а что в пространстве? В пространстве все сложнее. Сразу ясно, что бывают остроугольные множества из четырех точек. Достаточно взять вершины правильного тетраэдра: все треугольники в нем – это его грани, а углы в них, разумеется, все по 60 градусов. Оказывается, можно найти в пространстве и пятиточечное остроугольное множество. Грубо говоря, надо взять вместо тетраэдра пирамиду с квадратным основанием, а потом слегка изогнуть основание, чтобы избавиться от прямых углов.

Доказать, что в размерности 3 бóльших множеств не бывает, довольно муторная задача, которую мы хотели бы оставить за рамками этой статьи. Заинтересованный читатель при желании решит ее сам или подсмотрит решение в литературе (см., например, [2]).

Видно, что с увеличением размерности сложность и интересность задачи растет. Но не достигли ли мы потолка? Отнюдь нет! В математике с размерности 3 зачастую все только начинается. Однако чтобы

научиться работать с размерностями $d \geq 4$, нам нужно будет осознать несколько определений. Их мы дадим в следующем разделе.

Чуть-чуть о многомерной геометрии

Если на плоскости или в пространстве введена прямоугольная система координат, то каждая точка в ней представляется в виде $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ или $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. (Здесь и далее мы будем одной и той же буквой обозначать как точку, так и *радиус-вектор*, проведенный из начала координат \mathbf{O} в эту точку.) Хорошо известно, что расстояние между точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ (или длина вектора $\mathbf{x} - \mathbf{y}$) вычисляется по формуле

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

а расстояние между точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ вычисляется по формуле

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Обе формулы являются простыми следствиями теоремы Пифагора.

По аналогии будем обозначать \mathbb{R}^d и называть *d-мерным пространством* множество всех «точек» \mathbf{x} с d «координатами». Иными словами, точка – это произвольная последовательность (x_1, \dots, x_d) , состоящая из d действительных чисел. Эти числа мы и называем координатами. Начало координат – это, как обычно, точка $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)$. Расстояние между точками $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$ вычисляется по формуле, аналогичной формулам на плоскости и в трехмерье:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}.$$

А как найти угол?

Вернемся на плоскость. Как вычислить угол $\alpha = \angle \mathbf{xOy}$ (где \mathbf{x} , \mathbf{O} , \mathbf{y} – различные точки) с помощью координат? Напомним, что *скалярное произведение* векторов \mathbf{x} , \mathbf{y} можно вычислить как

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cdot \cos \alpha.$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

где, как и ранее, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ – координаты в прямоугольной системе координат. Приравнявая два выражения для (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , получаем

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

Поскольку величина, стоящая в знаменателе, положительна, угол острый тогда и только тогда, когда скалярное произведение (\mathbf{x}, \mathbf{y}) строго положительно.

Естественно, если нас интересует угол \mathbf{xuz} , где $\mathbf{y} \neq \mathbf{O}$, то достаточно посмотреть на знак скалярного произведения $(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{z} - \mathbf{y})$.

Совершенно аналогичная теория работает и в d -мерном случае. Скалярное произведение можно определить выражением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d.$$

Пусть, как и прежде, за остроту угла \mathbf{xuz} отвечает знак в выражении $(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{z} - \mathbf{y})$ (это согласуется с двумерным случаем). А проще даже не говорить про острые углы, а назвать *остроугольным* любое множество точек $X \subset \mathbb{R}^d$, в котором для любых трех точек \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} выполнено $(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{z} - \mathbf{y}) > 0$.

Обозначим через $f(d)$ максимальное количество элементов в остроугольном множестве $X \subset \mathbb{R}^d$. Мы уже объяснили в первом разделе, что $f(2) = 3$, $f(3) = 5$. Что же будет при $d \geq 4$? Поговорим об этом в следующих разделах.

Упражнения

1. Докажите, что для любых \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} выполнено

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

2. Докажите, что для любых \mathbf{x} , \mathbf{y} и любого числа c выполнено

$$(c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

3. Докажите, что если \mathbf{x} , \mathbf{y} лежат на окружности с центром в \mathbf{O} и с радиусом r , причем

$\mathbf{x} \neq \pm \mathbf{y}$, то

$$-r^2 < (\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r^2.$$

В то же время

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r^2, \quad (\mathbf{x}, -\mathbf{x}) = -r^2.$$

Удивительная история задачи

Вопрос об отыскании величины $f(d)$ поставил выдающийся венгерский математик Пал Эрдеш. Отвечая на вопрос Эрдеша, Данцер и Грюнбаум в 1962 году опубликовали статью [2], которую мы уже цитировали. Они заметили, что $3 = 2 \cdot 2 - 1$, $5 = 2 \cdot 3 - 1$, построили при любом d остроугольные множества мощности $2d - 1$ и доказали, что $f(d) \leq 2^d - 1$. Конечно, зазор в оценках

$$2d - 1 \leq f(d) \leq 2^d - 1$$

с ростом размерности колоссальный, но, не найдя остроугольных множеств, которые бы имели больше $2d - 1$ точек, Данцер и Грюнбаум высказали гипотезу, что $f(d) = 2d - 1$.

Гипотеза продержалась до 1983 года, когда сам Эрдеш вернулся к вопросу, объединив усилия с замечательным (тогда еще совсем молодым) математиком Фюрэди (который, кстати, в школьные годы был победителем международной математической олимпиады). Вместе Эрдеш и Фюрэди опубликовали статью, в которой, в частности, доказали неравенство

$$f(d) \geq \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^d \right\rceil = \left\lceil \frac{(1,154\dots)^d}{2} \right\rceil. (*)$$

Функция в правой части неравенства растет экспоненциально (т.е. как геометрическая прогрессия), и это гораздо более быстрый рост, чем у линейной функции $2d - 1$ из гипотезы Данцера–Грюнбаума. Правда, оценка (*) начинает преобладать над оценкой $2d - 1$ в немного феерической размерности 35. Тем не менее, гипотеза Данцера–Грюнбаума с треском провалилась.

Любопытно, что никакой конструкции остроугольного множества Эрдеш и Фюрэди не предъявили. Они лишь доказали с помощью вероятностного метода, что такое множество существует. С одной стороны,

это было торжеством вероятностного подхода, который Эрдёш и его многочисленные последователи пестовали с середины XX века и который действительно неоднократно показал свою мощь при решении самых сложных проблем комбинаторики (см. [3]). С другой стороны, это сильно сместило исследования в сторону вероятностной идеологии. Автор этой статьи написал об этом доступную школьникам брошюру [1] и в своих многочисленных лекциях всячески рекламировал задачу.

С момента публикации Эрдёша и Фюреди прошло довольно много времени, прежде чем появились новые результаты. В основном они касались размерностей $d \leq 34$. В итоге гипотеза Данцера–Грюнбаума оказалась неверна при всех $d \geq 4$.

Первые общие улучшения оценки (*) получил Беван в 2006 году, но ему лишь удалось заменить $\frac{1}{2}$ на $\frac{2}{3}$. Подобные улучшения до совершенства довела Бучок, которая в 2009 году доказала оценку вида (*) с заменой $\frac{1}{2}$ на 0,9428. В том же 2009 году Бен-Цви и Аккерман заменили константу на величину порядка \sqrt{d} . А в 2011 году Харанги удалось заменить 1,154 на 1,201. Всякий раз это были модификации вероятностного метода.

А в марте 2017 года случился удивительный прорыв: десятиклассник московской школы 179 Дмитрий Захаров сделал совершенно явную конструкцию (т.е. без помощи вероятности), которая показала, что $f(d+2) \geq 2f(d)$ (см. [5]). Разумеется, с учетом равенств $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ получаем по индукции оценку

$$f(d) > (\sqrt{2})^d = (1,414\dots)^d,$$

значительно превосходящую все ранее найденные границы. Найденное Захаровым доказательство невероятно простое, и мы изложим его в следующем разделе.

Еще через некоторое время Захаров усилил свой результат, показав, что $f(d+2) \geq f(d+1) + f(d)$. Многие знают, что такому неравенству с начальными условиями $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ удовлетворяют знаме-

нитые числа Фибоначчи, которые растут и вовсе как $(1,618\dots)^d$ (см., например, [4]).

Наконец, летом 2017 года появилась работа Геренчера и Харанги, в которой доказано, что... $f(d) \geq 2^{d-1} + 1$. Если бы не прорыв Захарова, этого результата бы не было еще очень долго. А теперь задача почти решена: отношение верхней и нижней оценок меньше двойки!

Доказательство неравенства

$$f(d+2) \geq 2f(d)$$

Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ – остроугольное множество, количество элементов которого $|X| = f(d)$. Построим на его основе остроугольное множество в \mathbb{R}^{d+2} мощности $2f(d)$. Сперва введем величину s , равную минимуму среди всех скалярных произведений $(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$. Поскольку множество X остроугольное, $s > 0$.

Рассмотрим на обычной плоскости окружность достаточно малого радиуса $r < \frac{\sqrt{s}}{2}$ с центром в начале координат. Для каждой точки $\mathbf{x} \in X$ выберем любую точку $\varphi(\mathbf{x})$ на этой окружности, потребовав лишь, чтобы все точки $\pm\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X$, были разными (что немудрено, ведь $|X| = f(d) < \infty$). Рассмотрим множество $Y \subset \mathbb{R}^{d+2}$:

$$Y = \{(\mathbf{x}; \pm\varphi(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in X\}.$$

Имеется в виду, что к каждой точке $\mathbf{x} \in X$, имеющей d координат, добавляются еще две координаты точки $\pm\varphi(\mathbf{x})$ на плоскости. Ясно, что $|Y| = 2f(d)$, и нам остается показать, что множество Y остроугольное.

Пусть $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}} \in Y$ – любые три различные точки. Разумеется, они имеют вид

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}; a\varphi(\mathbf{x})), \quad \tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}; b\varphi(\mathbf{y})),$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}; c\varphi(\mathbf{z})),$$

где $a, b, c \in \{-1; 1\}$. Надо проверить, что всегда

$$(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}) > 0.$$

Всего есть три варианта: 1) $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$; 2) $\mathbf{y} = \mathbf{x}$; 3) $\mathbf{z} = \mathbf{x}$. Ситуация, когда $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$, невозможна, так как в ней по

принципу Дирихле совпадают какие-то точки среди $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}$. Вариант 3) симметричен варианту 2), поэтому достаточно рассмотреть только варианты 1) и 2).

Итак, начнем с варианта 1). Имеем (см. упражнения)

$$(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x}) + (b\varphi(\mathbf{y}) - a\varphi(\mathbf{x}), c\varphi(\mathbf{z}) - a\varphi(\mathbf{x})).$$

Первое слагаемое не меньше s по определению числа s . С помощью упражнений 1 и 3 несложно показать, что второе слагаемое не меньше $-4r^2$. Но $s - 4r^2 > 0$, и, значит, в данном случае все в порядке.

Что с вариантом 2)? Здесь $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, откуда $a + b = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}}) &= \\ &= (b\varphi(\mathbf{y}) - a\varphi(\mathbf{x}), c\varphi(\mathbf{z}) - a\varphi(\mathbf{x})) = \\ &= (2a\varphi(\mathbf{x}), a\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{z})) = \\ &= 2((\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) \pm (\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{z}))) > 0 \end{aligned}$$

Одна задача – хорошо, а две – лучше

Как вы думаете, что сложнее – две задачи или одна из них в отдельности? Ответ кажется очевидным, однако посмотрите на следующие две задачи.

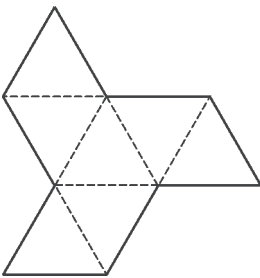


Рис. 1

Задача 1. Разрежьте фигуру на рисунке 1 на четыре части (не обязательно по пунктирным линиям) и сложите из них равносторонний треугольник.

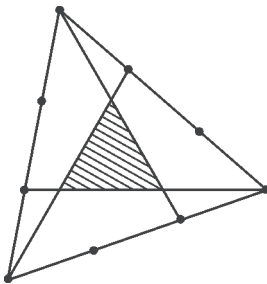


Рис. 2

Задача 2. Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на три равные части, и некоторые из точек деления соединены с противоположными вершинами треугольника так, как показано на рисунке 2. Найдите площадь заштрихованной части, если площадь исходного треугольника равна S .

в силу упражнения 3 и того факта, что $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$.

Тем самым показано, что скалярное произведение $(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{x}})$ всегда положительно. Значит, построенное множество остроугольно, что и дает оценку

$$f(d+2) \geq 2f(d).$$

Список литературы

1. *А.М.Райгородский.* Остроугольные треугольники Данцера–Грюнбаума. – М.: МЦНМО, 2009.
2. *L.Danzer, B.Grünbaum.* Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P.Erdős und von V.L.Klee. – Math. Zeitschrift, 79 (1962), 95–99.
3. *А.М.Райгородский.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2015.
4. *Н.Я.Виленкин.* Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.
5. *D.Zakharov.* Acute sets. – arxiv.org/abs/1705.01171

В отдельности эти задачи решать не так уж просто. В задаче 1 нужно по сути угадать разрезание; в задаче 2 первое, что приходит в голову – попытаться вычислить отношения, в которых отрезки делят друг друга. (Это действительно можно сделать, используя, например, технику центров масс, но простым такое решение вряд ли назовешь.)

Теперь посмотрим на эти две задачи, точнее, на два рисунка вместе: наложим одну картинку на другую (рис. 3). Решения обеих задач теперь стали очевидны! Первая задача решается отрезанием зеленых треугольников и перемещением их на место рыжих. Во второй задаче ответ будет $S/7$, потому что большая фигура, составленная из 7 маленьких треугольников, равновелика большому треугольнику.

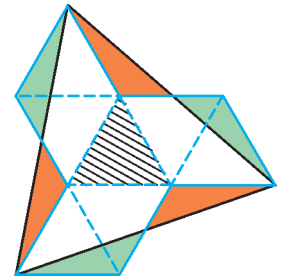


Рис. 3

Такое часто бывает и «в большой науке»: правильно поставленная новая задача может не только сама быть решена с помощью известных методов, но и помочь решить старую задачу, к которой до этого не знали, как подступиться.

Материал подготовил С. Кузнецов

Рождение гравитационно-волновой астрономии

Л. БЕЛОПУХОВ

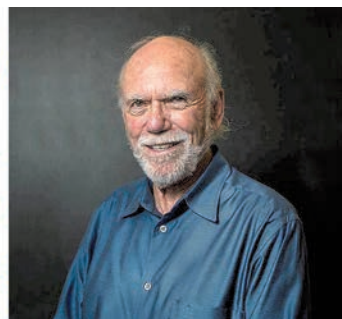
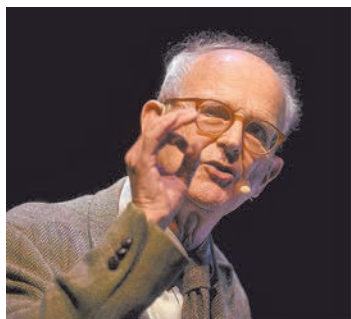
В 2017 ГОДУ НОБЕЛЕВСКУЮ ПРЕМИЮ ПО физике «за решающий вклад в развитие детектора LIGO (лазерно-интерферометрической гравитационно-волновой обсерватории) и наблюдение гравитационных волн» получили американские ученые Райнер Вайсс (Rainer Weiss), Барри Бэриш (Barry Barish) и Кип Торн (Kip Thorne).

Миллиард триста миллионов лет назад на огромном расстоянии от Земли две солидные черные дыры в своем кружении по Вселенной сошлись на такое расстояние, что сила их гравитационного взаимодействия стала активно притягивать их друг к другу. Одна из них имела массу в 36 раз больше массы Солнца, другая – больше в 29 раз. Сближаясь, они вращались вокруг своего центра масс так, что двигались как бы по спирали. Скорость этого вращения стала в конце концов огромной – один оборот за несколько миллисекунд. И наконец, черные дыры слились, издав короткий, но страшной силы

энергетический всплеск. По энергии это было все равно, что взорвать одновременно 10^{32} мегатонных атомных бомб. Большая часть этой энергии представляла собой гравитационную волну. Со скоростью света она стала распространяться во все стороны. Крохотный кусочек этой энергии достался и Земле. Очень образно президент РАН А.М. Сергеев в одном из своих интервью назвал этот всплеск «воплем». Тем более что на Земле диапазон частот этого волнового всплеска случайно оказался как раз в районе акустических частот. Электроакустическая система может сделать сигнал не только видимым на экране, но и слышимым. Действительно – вопль!

Известие об этом событии пришло на Землю 14 сентября 2015 года в 9 часов 50 минут 45 секунд по международному времени UTC (отличающемуся от московского времени на три часа назад). Оно было зафиксировано в США двумя установками коллаборации LIGO, находящимися на расстоянии 3000 км друг от друга.

Научное объяснение рождения гравитационных волн дается ОТО – общей теорией относительности Эйнштейна. По сути своей это теория гравитации с учетом специальной теории относительности и с отказом от обязательности столь привычной нам евклидовой геометрии. Краткая суть ОТО – всякая масса искажает и «искривляет» вокруг себя геометрию, превращая ее в неевклидову (риманову). При этом пространство и время нельзя в общем случае отделять друг от друга и геометрию нужно рассматривать как геометрию четырехмерного мира,



Райнер Вайсс, Кип Торн и Барри Бэриш

конкретные свойства которого определяют силами тяготения масс, находящихся в этом мире. Математическая сторона этой теории – уравнения гравитационного поля. Вот слова самого Эйнштейна в его замечательной популярной книге (написанной совместно с Л.Инфельдом) «Эволюция физики» (1938 г.):

«Ньютонов закон тяготения связывает движение тела здесь и теперь с движением другого тела в то же самое время на далеком расстоянии... Наши новые законы суть структурные законы, описывающие изменение поля тяготения. Они связывают события, которые происходят теперь и здесь, с событиями, которые будут происходить или уже происходили в другое время и в других точках. Схематически можно сказать – переход от ньютонова закона тяготения к общей теории относительности до некоторой степени аналогичен переходу от законов электростатики и магнитостатики к теории Максвелла».

Справедливость теории гравитации Эйнштейна была многократно доказана. Достаточно хотя бы того факта, что все точные расчеты траекторий движения космических аппаратов в околоземном и околосолнечном пространствах базируются не на простом ньютоновском законе тяготения, а на уравнениях общей теории относительности. А навигационные системы типов GPS, Глонасс и др. без использования уравнений ОТО давали бы ошибку в определении координаты земного объекта порядка 10 километров, а не 5 метров, как это достигнуто сейчас. ОТО совершенно необходима, когда речь идет об огромных массах (звезды, галактики и вся Вселенная). Кроме того, ОТО предсказывает явления, которые в ньютоновской теории отсутствуют. Именно к таким явлениям и относятся гравитационные волны. Как из уравнений Максвелла для электромагнитного поля обязательным следствием стало существование электромагнитных волн, так и из анализа гравитационных уравнений Эйнштейна вытекало, что должны существовать волны гравитации.

Косвенные доказательства наличия гравитационных волн появились к концу XX века. Например, при слиянии двух нейтронных

звезд (пульсаров) астрофизики зафиксировали значительное уменьшение суммарного момента импульса этой системы (Нобелевская премия по физике 1993 г.). Эта «пропажа» могла быть объяснена только потерей массы-энергии при слиянии звезд, уносом ее гравитационной волной.

Другой пример – наличие так называемых гравитационных линз. Теоретики рассчитали, что гравитационная волна своим изменением метрики пространства-времени может исказить излучение какого-либо космического объекта, подобно тому как линза искажает ход световых лучей. И такие искажения астрономами были зафиксированы.

Но прямых, «земных» экспериментальных доказательств существования гравитационных волн не было. Проблема заключается в слабости этого волнового сигнала, дошедшего до Земли. Энергия сигнала, достигшего Земли 14 сентября 2015 года, была по крайней мере в 10^{51} раз меньше энергии этой волны при ее рождении. Если провести аналогию со звуком от ударной взрывной волны, то это все равно, что взорвать одну миллионную долю грамма взрывчатого вещества на расстоянии десяти метров. Для человеческого уха это будет не «вопл» и даже не слабый треск – оно вообще никак не отреагирует на такой слабый звук.

Однако попытки физиков поймать сигнал гравитационной волны начались еще в 60-е годы прошлого века. Первым идею поимки гравитационной волны высказал и попытался ее осуществить американский физик Дж. Вебер в 1969 году. Идея была простая – чувствительными датчиками измерить деформации массивных тел, которые должны происходить, когда гравитационная волна, искажая метрику пространства-времени, проходит сквозь эти тела. Телами были алюминиевые цилиндры массами по полторы тонны с поясами из десятков пьезоэлектрических датчиков деформаций. Чувствительность датчиков была необычайно большой – до 10^{-15} м (размер атомных ядер). Вебер заявил, что он зафиксировал волны. Но это оказалось ошибкой. Скорее всего, это были сигналы от многочисленных помех – колебаний от посторонних источников, например от транспорта.

По схеме Вебера подобные опыты стали производиться в ряде стран, в том числе и в России (В.Б.Брагинский, МГУ). Результат всюду был отрицательный, поскольку расчеты астрофизиков показывали, что деформации под действием гравитационной волны должны быть значительно меньше 10^{-15} м. А датчиков, которые могли бы измерить такие малые величины, не существовало. В 60-е же годы появилась другая идея измерения таких малых деформаций – с использованием интерференции. Идея была выдвинута советскими физиками из МГУ М.Е.Герценштейном и В.И.Пустовойтом в 1962 году. Но на семинаре в Физическом институте АН СССР идея была раскритикована, а соответствующая статья не была рекомендована к печати. Через несколько лет идея использования интерферометрического метода возникла вновь, на этот раз в США.

Райнер Вайсс в Массачусетском технологическом институте в 1967 году начал разрабатывать проект лазерного интерферометра, который смог бы преодолеть «шумы» от всех посторонних источников (тепловые, сейсмические, гравитационные источники помех, неустойчивость частоты лазерного излучения и даже возможные помехи от геомагнитных бурь и всплесков космического излучения). Он рассчитал, что интерферометр должен иметь колоссальные размеры – несколько километров. Именно дальнейшее развитие проекта Вайсса и привело к созданию LIGO – лазерно-интерферометрической гравитационно-волновой обсерватории, которой и суждено было совершить открытие.

В 1968 году в Калифорнийском технологическом институте теоретик-астрофизик **Кун Торн** стал исследовать возможные источники гравитационных волн. Он выделил три источника – слияние двух черных дыр, слияние двойных пульсаров (нейтронных звезд) и последнюю стадию взрыва сверхновой звезды с образованием нейтронной звезды в ее центре. Он произвел оценки энергии гравитационных волн и смоделировал характер самого сигнала, приходящего на Землю. Это должен быть кусок нестандартной синусоиды с увеличивающимися амплитудой и частотой и резким прекращением сигнала. Дли-

тельность сигнала, его амплитуда и частота зависят от вида и энергии источника волны. Стало ясно, какой сигнал надо искать.

В 1970 году в Калифорнию переехал из Шотландии физик Рональд Древер, работавший в университете в Глазго. Он построил по своему проекту интерференционный детектор одновременно с Вайссом. Они были не конкурентами, а соратниками и друзьями и с момента создания LIGO работали вместе. К сожалению, Р.Древер, скончавшийся в марте 2017 года, не дожил полгода до присуждения Нобелевской премии своему другу.

Третьим нобелевским лауреатом стал физик-экспериментатор **Барри Бэриш**, работавший одним из руководителей Национальной лаборатории ускорителей имени Энрико Ферми «Фермилаб» (близ Чикаго), с 1993 года профессор Калифорнийского технологического института. Проект Вайсса и Древера развивался медленными темпами – слишком много научных и инженерных задач приходилось решать. И хотя за 15 лет работы группа Вайсса и Древера расширилась до 40 человек, этого было явно мало. Не доставало физика с инженерным мышлением и опытом организаторской и административной работы. Именно таким человеком был Бэриш. Он переработал проект с инженерных позиций и за несколько лет создал крупный международный коллектив – коллаборацию LIGO, куда привлек из разных стран (Италии, Германии, Японии, России) исследовательские группы, имеющие необходимый опыт. Его поистине бешеная энергия, характер, позволяющий срабатываться с людьми самых разных характеров, умение добиваться финансирования проекта обеспечили создание коллаборации.

Сегодня в LIGO работают свыше 1200 исследователей из 110 научных организаций 18 стран. Российские участники – группа В.Б.Брагинского из МГУ и группа из Нижегородского Института прикладной физики РАН. По мнению руководителей проекта, Владимир Борисович Брагинский вложил огромный вклад в открытие гравитационных волн. К сожалению, он ушел из жизни 29 марта 2016 года.

Бэриш стал директором LIGO в 1994 году и был им до 2005 года, когда он, оставаясь

членом коллаборации, принял предложение возглавить руководство другим глобальным международным проектом США – созданием линейного суперколлайдера. Но Нобелевская награда от него не ушла. Она увенчала его более чем десятилетние усилия по доведению до конца лазерно-интерферометрического проекта.

Под руководством Бэриша в 1994–1998 годах были построены две одинаковые обсерватории – в Хэнфорде и в Ливингстоне на расстоянии 3000 км друг от друга. К 2002 году там были установлены лазерные интерферометры. Но первые же измерения показали, что проект нуждается в серьезной переработке. Интерферометрическая система не смогла распознать события, которые были бы характерными для гравитационных волн. Теоретики под руководством Торна провели огромную работу по пересчету амплитуд возможных деформаций от гравитационных волн. Они оказались еще меньше, чем думали раньше, а именно порядка 10^{-20} – 10^{-21} м.

На первый взгляд, регистрация деформаций с такой точностью могла бы показаться невыполнимой. Ведь это все равно что измерять расстояние до ближайших звезд с погрешностью в одну десятую долю миллиметра. Но у руководителей проекта не опустились руки. Они оказались оптимистами, верящими в способности своего коллектива, А Барри Бэриш снова сумел добиться финансирования проекта. Началось обновление проекта. Применение более мощного лазера, создание группой В.Б.Брагинского улучшенной тройной системы подвеса зеркал, разработка математиками из МГУ программного обеспечения автоматической регистрации событий и многое другое потребовали еще десяти лет напряженной работы.

В 2014 году началась регулярная, а потом и постоянная работа установок, прерываемая только остановками для воссоздания необходимого вакуума в трубах. Исследователи не дежурили непрерывно у экранов, чтобы поймать характерный сигнал. Система регистрировала множество сигналов, возникающих по самым разным причинам. Но они не были похожи на сигналы, рассчитан-

ные Торном и другими астрофизиками. Если бы появился нужный сигнал, система сама переслала бы его на рабочую почту в несколько центров LIGO в европейских городах.

Именно так и произошло 14 сентября 2015 года, когда впервые были зафиксированы гравитационные волны, – уже через полчаса все участники коллаборации получили сообщение об этом событии.

Началась тщательная обработка сигнала и вычисление энергии черных дыр. Астрофизики стали проверять все данные об излучениях в этой области неба, откуда пришла волна, и действительно обнаружили мощные кратковременные электромагнитные излучения, которые можно было объяснить только втягиванием масс в две мощные сходящиеся черные дыры (вде самих черных дыр увидеть нельзя). Вполне возможно, что без «подсказки» физиков из LIGO астрофизики проморгали бы эти излучения – они были очень кратковременными. Но теперь сошлись концы с концами, и событие, зафиксированное 14 сентября 2015 года, считается первым надежным доказательством существования не только гравитационных волн, но и черных дыр!

Работа опознания длилась несколько месяцев, и 11 февраля 2016 года на пресс-конференции в ЦЕРНе в Женеве было объявлено об открытии гравитационных волн. В тот же день вышел из печати специальный выпуск самого авторитетного физического журнала *Physical Review Letters*, где было заявлено это открытие. За последние два года произошли еще четыре регистрации гравитационных волн. Особенно интересной была регистрация 17 августа 2017 года. В этот день впервые была зафиксирована гравитационная волна от слияния двух нейтронных звезд, и одновременно это событие наблюдалось астрономами как превращение двух звезд в одну. И тут уже Нобелевскому комитету по физике некуда было деваться. Открытие стало фактом, и оно было единодушно признано заслуживающим Нобелевской премии 2017 года. Она была присуждена американским физикам Райнеру Вайссу, Кипу Торну и Барри Бэришу. В денежном измерении половина премии присуждалась

Вайссу, а вторая половина делилась поровну между Торном и Бэришем.

Что же собой представляет лазерный интерферометр? Лазер излучает импульс (в световом диапазоне), и этот импульс разделяется на два взаимно перпендикулярных луча («плечи» интерферометра). Лучи внутри труб устремляются к зеркалам, находящимся на расстоянии 4 км от источника. Зеркала являют собой массивные металлические плиты, подвешенные на системах Брагинского из трех последовательных подвесов (для всемерного уменьшения тряски и деформации зеркал от посторонних причин). Отраженные от зеркал лучи сходятся около лазера и интерферируют. Система настроена так, что если нет никаких гравитационных возмущений, то эти лучи погашают друг друга. Но если пробегает гравитационная волна (поперечная и поляризованная, как ожидалось по теории), то она искажает пространство-время только в одном из плеч интерферометра и вследствие этого возникает сдвиг по фазе между двумя интерферирующими лучами. Интерферометр регистрирует колебания гравитационного поля – прохождение гравитационной волны.

А зачем же нужны были две одинаковые установки на расстоянии 3000 км друг от друга? Время запаздывания сигнала на одной из установок оказалось как раз равным времени прохождения гравитационной волны от одной установки к другой (порядка 0,01 секунды). Различный характер деформации зеркал в этих двух установках позволил определить примерное направление (угловые небесные координаты) на источник волны. Огромной трудностью было создание и поддержание вакуума в большом объеме этих труб, чтобы свести до минимума рассеяние лучей на молекулах воздуха. Для сооружения установок необходимо было тщательно выровнять четырехкилометровые пути для труб и построить длинные мощные фундаменты. Но, главное, нужно было найти такие места, где все объекты цивилизации находились бы достаточно далеко, но в то же время добираться до этих мест было бы не очень затруднительно. В США такие места нашли на северо-западе в штате Вашингтон

на заброшенном атомном полигоне и на юго-западе в штате Луизиана в краю тропических и субтропических лесов.

Несмотря на кажущуюся простоту измерительной схемы, сооружение установок обходится очень дорого (сотни миллионов долларов). Правительство США не участвовало в этом проекте, основные средства дали Национальный научный фонд США и германское Общество имени Макса Планка. В создании отдельных элементов участвовали Совет по обеспечению науки и техники Великобритании и Австралийский Совет по исследованиям. Российские физики из нижегородского Института прикладной физики создали очень нужный элемент – изолятор Фарадея, сложную систему, отклоняющую отраженный луч обратно в лазер и направляющую его к интерферометру. Участие группы Брагинского заключалось не только в разработке конструкции подвеса зеркал, но и в выборе материала для зеркал и нитей подвеса. И, как уже отмечалось выше, математики из МГУ разработали программное обеспечение для системы распознавания сигнала.

Значение открытия гравитационных волн не только очень велико, но и многообразно. Это:

- прямое доказательство существования гравитационных волн;
- прямое доказательство поперечности гравитационных волн и их поляризации;
- доказательство правильности рабочих версий ОТО;
- прямое доказательство существования черных дыр;
- прямое доказательство существования двойных черных дыр;
- обнаружение самой мощной черной дыры (не в центрах галактик);
- установление верхнего предела массы гравитона: 10^{-58} кг;
- уточнение постоянной Хаббла: 70 ± 10 км/с на мегапарсек.

И, наконец, по-видимому, самое важное – это открытие нового способа наблюдений во Вселенной, рождение гравитационно-волновой астрономии.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

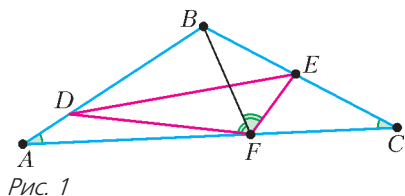
Задачи M2502–M2505 предлагались на региональном этапе XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задачи Ф2509–Ф2512 предлагались на Всесибирской открытой олимпиаде школьников по физике 2018 года.

Задачи M2502–M2505, Ф2509–Ф2512

M2502. Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2018 (выписывать уже имеющееся число запрещено); начинает Петя. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию, этот игрок выигрывает. У кого из игроков есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть?

М. Дидин, П. Кожевников

M2503. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle C = 30^\circ$ (рис. 1). На его сторонах AB , BC и AC выбраны точки D , E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$. Периметр треугольника ABC равен



p , а периметр треугольника DEF равен p_1 . Докажите, что $p \leq 2p_1$.

А. Кузнецов

M2504. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n , взаимно проста с n .

Р. Салимов

M2505. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребенка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

С. Берлов, Н. Власова, Д. Храмов

Ф2509. Открытый без крыши вагон (железнодорожники их называют полувагонами) высотой $H = 4,5$ м движется с постоянной скоростью $u = 6$ м/с. Как только вагон проехал мимо грузчика, тот сразу попытался закинуть через заднюю стенку вагона небольшой мешок. Какую минимальную скорость v (в м/с) при этом необходимо сообщить мешку? Известно, что при забрасывании мешка грузчик «отпускает» его на высоте $h = 1$ м от уровня земли. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Соппротивлением воздуха пренебречь.

А. Киприянов

Ф2510. Горлышко бутылки с внутренним диаметром $D = 1$ см находится на расстоянии $H = 10$ см ниже водопроводного крана, внутренний диаметр носика которого $D_0 = 2$ см (рис. 2). Центры горлышка бутылки и носика крана находятся на одной вертикали. При каком максималь-

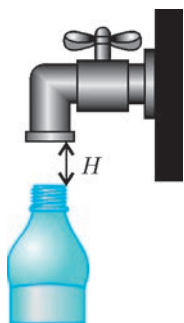


Рис. 2

ном расходе воды Q_0 (в л/с) вся вода будет попадать в бутылку? Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Считать течение воды спокойным (ламинарным). Влиянием воздуха, вытесняемого из бутылки в процессе ее заполнения водой, пренебречь.¹

Д.Медведев

Ф2511. Имеются 10 одинаковых флаконов с жидкостью. Они хранятся внутри ящика, из которого тепло наружу не выходит. Для лучшего хранения каждый флакон надо на некоторое время нагреть до температуры $+90^\circ\text{C}$. Для этого взяли первый флакон и нагрели его до нужной температуры, затратив на это количество теплоты $Q = 30 \text{ кДж}$. Затем поставили его внутрь ящика и подождали, пока температуры всех флаконов не выровнялись за счет теплообмена. Затем взяли второй флакон и проделали с ним ту же самую процедуру, включая последующее выравнивание температур, и так далее. Какое количество теплоты потребуется для прогрева десятого флакона?

В.Боровков

Ф2512. Деревянный сосуд цилиндрической формы (рис.3) плавает в воде, погружившись на 0,2 своей высоты, когда он пустой, и на 0,95 высоты, когда он заполнен водой. Во сколько раз плотность дерева, из которого изготовлен сосуд, меньше плотности воды?

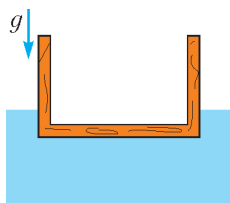


Рис. 3

В.Баткин

Решения задач М2490–М2492, Ф2497–Ф2500

М2490. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь).

¹ Например, потому, что в боковой стенке бутылки имеется отверстие для выпуска воздуха. (Прим. ред.)

Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., ..., 100, ключи тоже пронумерованы, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более: а) 99 попыток; б) 75 попыток; в) 74 попыток?

Ответ. а), б) Можно; в) нельзя.

а) Попробуем, подходит ли первый ключ к первой двери. Если да, то первый ключ опознан. Если нет, то он подходит ко второй двери, а к первой двери подходит второй ключ. В этом случае опознаны два ключа. Берем очередной слева неопознанный ключ, проверяем его на соответствующей ему двери, распознаем хотя бы один ключ. Если после 99 таких попыток останется нераспознанное, то это последний ключ и для него осталась только одна дверь.

б) Попробуем, подходит ли третий ключ к третьей двери. Если он подходит, то с первыми двумя ключами мы сможем разобрататься за одну попытку. Итого за две попытки опознаны первые три ключа. Если он не подошел, то попробуем, подходит ли он ко второй двери. Если да, то первый ключ может подойти только к первой двери, а второй – к третьей. Опять за две попытки опознаны три первых ключа. Если снова не подошел, то он подходит к четвертой двери. Первые два ключа могут обслужить только две двери, следовательно, третью дверь открывает четвертый ключ. С первыми двумя ключами и дверями разберемся за одну попытку. В этом случае за три попытки опознаны четыре ключа.

Повторяем процесс: пробуем третий слева неопознанный ключ к соответствующей двери. Распознаем за две попытки три ключа или за три попытки четыре ключа. Если мы уже не можем выполнить этот шаг, то осталось менее трех нераспознанных ключей. С двумя ключами разберемся за одну попытку, с одним – за ноль попыток.

Поскольку каждый раз количество попыток не превосходило $3/4$ распознаваемых дверей, то всего попыток будет не более 75. в) Предположим, что Хвастун умеет это делать за 74 попытки. Разобьем двери и ключи на 25 подряд идущих четверок. Облегчим Хвастуну задачу. Будем предлагать ему только такие расположения ключей, в которых ключи не могут открывать двери из других четверок, и сообщим Хвастуну об этом. Тогда бессмысленно будет пробовать ключ к двери из другой четверки, и у Хвастуна все равно есть стратегия за 74 попытки. По этой стратегии в какой-то четверке он делает не более двух попыток. У пары попыток есть лишь четыре различных исхода, и для каждого из них Хвастун указывает какое-то расположение ключей в четверке. Но вариантов соответствия четырех ключей и четырех дверей больше: (1234), (2134), (1324), (1243), (2143). Противоречие.

А.Лебедев, А.Шаповалов

M2491. Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил: 1) вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем еще на 2 куска, затем один из трех кусков опять режем на 2 куска и т.д.; 2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса любой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа R .

а) Докажите, что при $R = 0,5$ можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезов можно будет отрезать еще один кусок).

б) Докажите, что если $R > 0,5$, то процесс резки когда-нибудь остановится.

в) На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если $R = 0,6$?

г) Докажите, что если при данном R сыр можно разрезать на 11 кусков, то его также можно разрезать и на 12 кусков.

Решение – в статье А.Толпыго «Как разрезать сыр?»

M2492. В неравностороннем треугольнике ABC проведены медианы AA_0 , BB_0 ,

CC_0 и высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Пусть A_2 – точка пересечения окружностей, описанных около треугольников BA_1B_0 и CA_1C_0 , отличная от точки A_1 . Аналогично определим точки B_2 и C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке.

Применим следующее преобразование: сначала выполним инверсию относительно окружности с центром в точке B радиуса $\sqrt{\frac{AB \cdot BC}{2}}$, а затем – симметрию относительно биссектрисы угла B . При таком преобразовании A перейдет в A_0 (и наоборот), C – в C_0 . Основание высоты B_1 перейдет в точку X , для которой $\triangle B A B_1 \sim \triangle B A_0 X$, $\triangle B C B_1 \sim \triangle B C_0 X$. Отсюда $XA_0 \perp BC$, $XC_0 \perp BA$, т.е. X совпадает с центром O описанной окружности треугольника ABC . Тогда интересующие нас описанные окружности треугольников BA_1A_0 и CB_1C_0 перейдут в описанные окружности треугольников A_0OA и C_0OC (рис.1), а точка B_2 переходит во вторую

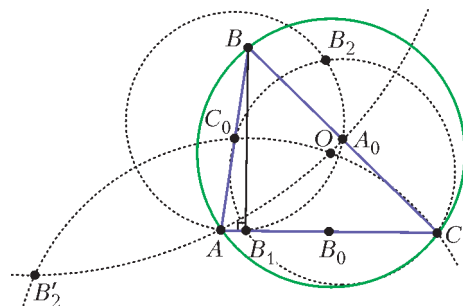


Рис. 1

(отличную от O) точку пересечения этих окружностей; назовем эту точку B'_2 . Аналогично определим A'_2 и C'_2 . Заметим, что прямые BB_2 и BB'_2 симметричны относительно биссектрисы угла B и аналогичное утверждение верно для пар прямых AA_2 и AA'_2 , CC_2 и CC'_2 , поэтому достаточно показать, что прямые AA'_2 , BB'_2 , CC'_2 пересекаются в одной точке; тогда прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 будут пересекаться в изогонально сопряженной точке.

Покажем, что на самом деле $A'_2 = B'_2 = C'_2$, или, эквивалентно, что центры окружностей A_0OA , B_0OB и C_0OC лежат на одной

прямой (тогда помимо точки O эти окружности действительно имеют еще одну общую точку – симметричную точке O относительно линии центров). Центр описанной окружности треугольника B_0OB лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам OB и OB_0 (рис.2).

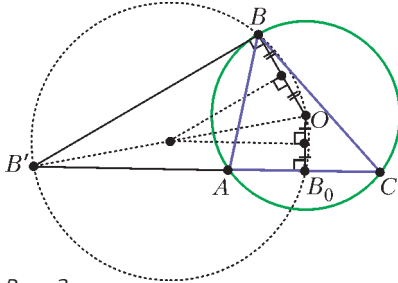


Рис. 2

Гомотетия с центром O и коэффициентом 2 переведет центр окружности B_0OB в точку B' пересечения AC и касательной к окружности, описанной около треугольника ABC , проведенной через точку B . Аналогично определяются точки A' и C' . Нам остается доказать, что точки A' , B' и C' лежат на одной прямой.

Это можно сделать разными способами. Например, это следует из вырожденного случая теоремы Паскаля (для шестерки точек A, A, B, B, C, C). Другой способ – рассмотреть треугольник, образованный касательными AA' , BB' , CC' , и применить теорему Дезарга к этому треугольнику и треугольнику ABC . Задача решена. В заключение заметим, что задача может быть решена и вычислительно (например, с помощью теоремы Чевы в форме синусов), правда, совсем простого решения нам не известно. В качестве упражнения предлагаем доказать, что для равнобедренного (но не равностороннего) треугольника) прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в точке, симметричной точке пересечения медиан относительно основания.

Т.Ковалев, А.Львов

Ф2497. В журнале «Физика в школе» было опубликовано такое условие задачи: «Свободно падающее с ускорением $g = 10 \text{ м/с}^2$ тело спустя некоторое вре-

мя после начала движения оказывается на высоте $h_1 = 300 \text{ м}$ над землей, а еще через время $\Delta t = 10 \text{ с}$ – на высоте $h_2 = 120 \text{ м}$ над землей. С какой высоты падало тело?» И был дан такой ответ: « $H = 1531 \text{ м}$ ». Найдите две опечатки (по одному символу в каждой) в опубликованном материале.

Понятно, что приведенные числовые значения никоим образом друг другу не подходят. Предположим, что высоты h_1 и h_2 указаны правильные, тогда время Δt никак не может быть равным 10 с. А вот если предположить, что в числе для Δt между символами «1» и «0» пропущена запятая, т.е. время равно точно 1,0 с, тогда ответ должен получиться 1831 м. Ну вот, и вторая опечатка найдена: начальная высота приблизительно равна не 1531 м, а 1831 м! Иными словами, вместо символа «8» был ошибочно поставлен символ «5».

У.Страшинов

Ф2498. Стенки пластиковой бутылки от сильно газированного напитка могут выдержать давление (изнутри) $p = 10 \text{ атм}$. В такую бутылку емкостью $V = 1 \text{ л}$ налили $V/2$ жидкого азота, закрыли бутылку пробкой и положили на асфальт, накрыв бутылку сверху пустым жестяным ведром емкостью 10 л и массой 1 кг. Через некоторое время произошел взрыв. Ведру достался 1% внутренней энергии газа внутри бутылки до взрыва. Оцените высоту подъема ведра над местом старта. Температура кипения жидкого азота при давлении $p = 10 \text{ атм}$ равна примерно $T = 100 \text{ К}$. Плотность ρ жидкого азота примерно равна плотности воды $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г/см}^3$.

Будем считать, что весь кислород, который входил в состав воздуха в бутылке, сконденсировался и в газообразном состоянии в бутылке в объеме 0,5 литра перед взрывом находился только азот. Этот азот после заливки в бутылку жидкого азота, естественно, охладился, и его вклад в суммарное давление перед взрывом был меньше атмосферного, поэтому этим вкладом можно пренебречь. Сжимаемостью

жидкого азота тоже можно пренебречь. Оценим объем ΔV жидкого азота, который перешел в газообразное состояние, чтобы создать в бутылке давление 10 атм:

$$p(0,5V + \Delta V) = \frac{\rho \Delta V}{M} RT,$$

откуда

$$\Delta V = \frac{V}{2} \frac{1}{\frac{\rho RT}{Mp} - 1} = 0,035 \frac{V}{2}.$$

Таким образом, объем газа в бутылке перед взрывом был равен

$$V_{\text{газа}} = 0,5175 \text{ л.}$$

Азот – двухатомный газ, поэтому внутренняя энергия газообразного азота внутри бутылки перед взрывом равна

$$U = \frac{5}{2} p V_{\text{газа}} \approx 1,3 \text{ кДж.}$$

По условию, 1% этой энергии превратился в кинетическую энергию ведра. Отсюда находим максимальную высоту ведра над уровнем старта:

$$H = \frac{0,01 \cdot 1,3 \text{ кДж}}{1 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 1,3 \text{ м.}$$

Поскольку эксперимент с такой бутылкой дает высоту подъема ведра около 10 метров, это означает, что ведру на самом деле достается не 1% внутренней энергии газа, а примерно 8%.

А.Зотов

Ф2499. Длина круговой траектории протонов в Большом адронном коллайдере (БАК) равна $L = 26659$ м. Индукция магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости траектории, равна $B = 7,5$ Тл. Вычислите разницу между скоростью света и скоростью протонов в коллайдере.

Протоны в коллайдере движутся со скоростями, сравнимыми со скоростью света c . Согласно специальной теории относительности Эйнштейна, в таком случае связь между импульсом и скоростью частицы дается соотношением

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 называют массой покоя, а массу m движущейся частицы определяют как зависящий от скорости коэффициент пропорциональности между p и v :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Обозначим величину, которую нужно найти, через Δv , тогда $v + \Delta v = c$. Понятно, что $\Delta v/c \ll 1$. На движущийся по окружности радиусом $R = L/(2\pi)$ протон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, равная $F = qvB$. Запишем закон движения протона:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v^2}{R} = qvB, \text{ или}$$

$$\frac{m_0 c (c - \Delta v)}{\sqrt{2c\Delta v - \Delta v^2}} = BRq, \text{ или}$$

$$\left(\frac{m_0 c}{BRq} \right)^2 \left(1 - 2 \frac{\Delta v}{c} + \frac{\Delta v^2}{c^2} \right) = 2 \frac{\Delta v}{c} - \frac{\Delta v^2}{c^2}.$$

Можно, конечно, и честно решить это квадратное относительно Δv уравнение, но поскольку $\Delta v/c \ll 1$, то его можно переписать в виде

$$\left(\frac{2\pi m_0 c}{LBq} \right)^2 = 2 \frac{\Delta v}{c}.$$

Отсюда находим

$$\Delta v = \frac{c}{2} \left(\frac{2\pi m_0 c}{LBq} \right)^2 \approx 1,4 \text{ м/с.}$$

С.Дмитриев

Ф2500. Сплошной прозрачный цилиндр, изготовленный из материала, коэффициент преломления которого зависит от расстояния r между местом в цилиндре и его осью симметрии по «закону»

$$n = 1 + (n_0 - 1) \cdot \left(1 - (r/r_0)^2 \right).$$

Здесь r_0 – это радиус цилиндра, $n_0 = 1,2$. Узкий луч лазера падает перпендикулярно на торец цилиндра в направлении, параллельном оси цилиндра, в точку, расположенную на расстоянии $r_0/10$ от оси цилиндра. По какой траектории движется лазерный луч внутри цилиндра?

Как следует из условия, падающий луч света и ось симметрии цилиндра лежат в одной плоскости, и это останется справедливым для всей траектории луча света внутри цилиндра. В этой плоскости луч света не будет прямолинейным. Если рассмотреть два соседних очень тонких слоя прозрачного материала, которые пересекаются лучом света под некоторыми небольшими углами dr/dx с поверхностью раздела, то из закона преломления света следует условие $n(r) \cdot \sin(\pi/2 - dr/dx) = \text{const}$. Минимальное значение $\sin(\pi/2 - dr/dx)$ достигается в тот момент, когда луч света пересекает ось цилиндра. При этом $\sin(\pi/2 - dr/dx) = 0,9983$ (3) и $dr/dx = 0,05774\dots$ При таком малом значении угла (dr/dx) можно синус угла $(\pi/2 - dr/dx)$ представить в виде

$$\begin{aligned} \sin(\pi/2 - dr/dx) &= \sqrt{1 - \cos^2(dr/dx)} = \\ &= 1 - (dr/dx)^2/2. \end{aligned}$$

В результате из закона преломления следует такое равенство:

$$\begin{aligned} \left(1 + (n_0 - 1) \cdot \left(1 - (r/r_0)^2\right)\right) \cdot \left(1 - (dr/dx)^2/2\right) = \\ = \text{const}. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки, получаем

$$\begin{aligned} (n_0 - 1) \cdot (r/r_0)^2 + n_0 \cdot (dr/dx)^2/2 - \\ - (n_0 - 1) \cdot (r/r_0)^2 \cdot (dr/dx)^2/2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Третье слагаемое представляет собой произведение двух очень малых величин, и этим третьим слагаемым можно пренебречь. Тогда имеем

$$(n_0 - 1) \cdot (r/r_0)^2 + n_0 \cdot (dr/dx)^2/2 = \text{const}.$$

Продифференцируем полученное соотношение по координате x :

$$\begin{aligned} 2r \cdot (dr/dx) \cdot (n_0 - 1) \cdot (1/r_0)^2 + \\ + n_0 \cdot (dr/dx) \cdot (d_2r/dx^2) = 0. \end{aligned}$$

Разделим оба слагаемых на одинаковый множитель $n_0(dr/dx)$:

$$2r \cdot (1 - 1/n_0) \cdot (1/r_0)^2 + (d_2r/dx^2) = 0.$$

Получено уравнение второго порядка, аналогичное уравнению гармонических колебаний, только в роли координаты «время» в этом уравнении выступает координата « x ». Решение этого уравнения – гармоническая функция расстояния r от координаты x :

$$r(x) = (r_0/10) \cdot \cos\left((x/r_0) \cdot \sqrt{2 - 2/n_0}\right).$$

С. Муравьев

Как резать сыр?

А. Толпыго

Эта статья посвящена обсуждению и решению задачи М2491 «Задачника «Кванта».

Мы будем решать следующую задачу: требуется разрезать головку сыра на некоторое (по возможности большее) число кусков. При этом должны соблюдаться следующие правила: (i) мы вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем на 2 части, потом одну из трех частей опять режем на 2 части и так далее; (ii) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение весов любых двух частей должно быть больше заданного числа R . В этом

случае мы будем говорить, что сыр резали *правильно*.

Очевидно, прежде всего, что интересны только случаи, когда заданное число R находится в пределах от $1/2$ до 1. В самом деле, если $R \geq 1$, то сыр нельзя резать даже на две части (ибо каждая обязана быть строго больше другой), тогда как при $R < 1/2$ резать можно неограниченно: разрежем сыр пополам, потом каждую часть (по очереди) пополам, затем каждую четвертушку пополам и так далее. Соответственно, дальше мы всюду будем считать, что $1/2 \leq R < 1$.

Рассмотрим для начала случай $R = 1/2$. Здесь уже все не так ясно: если разрезать сыр точно пополам, то после этого уже ничего сделать будет нельзя: разрезав одну

из частей, мы получим кусок не более половинки другой части, а это уже запрещено.

Тем не менее, выход из положения есть.

Утверждение 1. Если $R = 1/2$, то сыр можно резать неограниченно, т.е. так, чтобы после любого числа разрезов можно было сделать еще одно.

Для доказательства, как часто бывает, нужно немного усилить утверждение.

Утверждение 1'. Если $R = 1/2$, то сыр можно правильно разрезать на n частей, притом так, чтобы никакие две части не были равны по весу.

Доказательство (по индукции). Разрезать на 2 неравные части можно. Пусть сыр уже правильно разрезан на $(k-1)$ частей: $a > b > c > \dots > f$. Разрежем наибольшую часть a пополам; имеем части $b, c, \dots, f, a/2, a/2$. Поскольку

$$f > a/2 > b/2, \quad (*)$$

сыр разрезан правильно, причем получившиеся части – наименьшие. Правда, не выполнено индуктивное предположение: имеется две равные части. Однако поскольку в соотношении (*) оба неравенства строгие, можно немного увеличить одну из двух последних частей, соответственно уменьшив другую так, чтобы неравенства сохранялись. Тем самым, индуктивный переход завершен.

Рассмотрим теперь произвольное R , $1/2 < R < 1$. Для начала докажем одно полезное утверждение.

Утверждение 2. При правильном разрезании необходимо всегда резать самый большой кусок.

Доказательство. Пусть a – наибольший кусок. Если мы режем какой-то кусок b , $b \leq a$, то один из получившихся кусков не больше $b/2 \leq a/2$, т.е. по крайней мере вдвое меньше куска a , который пока что остался целым. Противоречие.

Заметим дополнительно, что отсюда видно: если имеется два одинаковых наибольших куска, то дальше резать сыр уже невозможно.

На какое максимальное число кусков можно разрезать сыр при данном R ? Оказывается, прежде всего, что справедлив

любопытный факт: каково бы ни было R , максимальное число – четное. Точнее, справедливо такое утверждение.

Утверждение 3. Если сыр можно правильно разрезать на $(2n-1)$ частей, то его можно правильно разрезать также и на $2n$ частей.

Для доказательства введем понятие *оптимального разрезания*.

Заметим для начала, что условие «отношение весов любых двух кусков должно быть больше R » достаточно проверить для наименьшего и наибольшего из имеющихся кусков; если для них оно верно, то для всех других оно выполнено автоматически.

Пусть заданы какие-то натуральные s, r ; допустим при этом, что сыр уже каким-то образом правильно разрезан на r кусков, и мы хотим сделать дополнительно еще s разрезов, т.е. получить $(r+s)$ кусков. Разумеется, это можно сделать разными способами. Назовем способ разрезания *оптимальным*, если после каждого из s разрезов одновременно выполнены два условия, а именно

условие *минимакса*: наименьший из получившихся к этому моменту кусков не меньше, чем получающийся при любом другом способе правильного разрезания («минимальный кусок максимален», отсюда и понятие «минимакс»),

условие *максимина*: наибольший из получившихся к этому моменту кусков не больше, чем получающийся при любом другом способе правильного разрезания.

Очевидно, если эти условия выполнены одновременно, то на каждом шаге отношение веса наименьшего куска к весу наибольшего будет больше (или равно), чем при любом другом. Отсюда немедленно следует, что если правильный способ разрезания вообще существует, то оптимальный способ – тоже правильный.

Прежде чем двигаться дальше, сделаем несколько замечаний об оптимальности как таковой.

Прежде всего, важно помнить, что это определение **зависит** от выбора r и s ; одно и то же разрезание может быть оптимальным для одного s и не быть таким для

другого (ниже мы приведем такие примеры). С другой стороны, понятие оптимальности не зависит от того, каково R : ведь в определении оптимальности число R не участвует.

В чем же тогда выражается оптимальность? А вот в чем. Легко видеть, что как бы мы ни резали сыр, данное разрезание всегда будет правильным для маленьких R и неправильным – для больших. Можно сказать и точнее. Пусть кусок сыра произвольным образом, но с соблюдением правила (i) был разрезан на конечное число частей; вычислим всевозможные отношения весов кусков после первого, второго,, последнего разрезания – это конечное число положительных чисел. Пусть R_0 – наименьшее из этих чисел. Тогда очевидно, что наше разрезание было правильным для любого $R < R_0$ и неправильным – для всех остальных. (То же самое – если поначалу был не один кусок, а несколько.) Преимущество оптимального разрезания перед другими (его оптимальность) состоит в том, что для оптимального разрезания число R_0 – самое большое, какое только возможно.

Таким образом, если нам требуется решить обратную задачу (число R не задано, но указан способ разрезания и требуется узнать, при каких R он правильный), то предпочтителен именно оптимальный способ: если какое-то R годится для другого способа, то оно годится и для оптимального (но не наоборот).

И еще одно немаловажное замечание: *определение оптимальности отнюдь не гарантирует ни существования, ни единственности*: оптимальный способ разрезания может не существовать вообще или их может быть много.

Пусть, например, имеется поначалу только один кусок сыра. Тогда его можно оптимально разрезать на два куска: оптимальным будет разрезание ровно пополам (отношение наименьшего куска к наибольшему равно 1, и больше оно уж никак не может быть). Но если мы собираемся резать сыр на три части, то такое разрезание не только не оптимально – оно довольно плохое, поскольку при втором разреза-

нии непременно один кусок окажется вдвое меньше другого.

Более того, это означает, что оптимального разрезания в данном случае вообще не существует: ведь оптимальность должна выполняться как на первом шаге (разрезание на 2 части), так и на втором, а в данном случае требования оптимальности противоречат одно другому. Пример, когда существует много разных оптимальных разрезаний, постарайтесь придумать сами.

Теперь вернемся к нашей задаче. Мы рассматриваем такую ситуацию: сыр уже удалось правильно разрезать на r кусков, и мы собираемся сделать еще s разрезов. Мы утверждаем, что если $s \leq r$, то для этого имеется оптимальный способ, который состоит в следующем: нужно последовательно делить каждый имеющийся кусок ровно пополам, начиная с наибольшего и далее в порядке убывания – сначала кусок a , потом b , потом c и так далее.

Действительно, при таком способе, например, после двух разрезов наибольший кусок есть c , а наименьший – $b/2$. Очевидно, что как бы мы ни делили, наибольший из оставшихся после двух разрезов кусок будет либо равен c (если мы поделили куски a, b), либо больше его, так что способ является максиминным. Аналогично, очевидно, что какие бы куски мы ни резали, наименьший кусок всегда будет не больше $b/2$.

Остальное несложно. Допустим, что сыр можно разрезать на $(2n - 1)$ частей; тогда в некоторый момент частей было n , и это были части $a \geq b \geq c \geq \dots \geq f \geq g$. После этого мы делили правильно; следовательно, мы могли также применить (с этого момента) оптимальный способ и делить каждую часть ровно пополам. После $(2n - 2)$ -го деления мы получили части: $g, a/2$ (две штуки), $b/2$ (две штуки),, $f/2$ (две штуки). Разделим теперь и часть g пополам; мы получили те же части, что n шагов назад, только каждая часть вдвое меньше и имеется в двух экземплярах. Ясно, что деление – правильное.

Важное замечание: указанный способ правильного деления – в некотором смысле «наилучший», если мы не собираемся

делить более чем на $2n$ частей, но он же оказался бы «наихудшим», если бы мы хотели разделить на большее число частей. В самом деле, после заключительного деления мы получили два одинаковых максимальных куска сыра. Значит, после следующего деления один из них сохранится, а, с другой стороны, наименьший кусок будет не больше половины этого. Следовательно, при $R \geq 1/2$ дальнейшее деление невозможно.

Теперь предположим, что сыр можно правильно разрезать на $2n$ частей, и постараемся выяснить, можно ли продолжить деление.

Для этого удобно рассмотреть ситуацию уже после n -го разрезания, т.е. когда имеется $(n + 1)$ частей. Пусть эти части $a \geq b \geq c \geq \dots \geq g \geq h$.

Поскольку мы пока что собираемся разделить сыр только на $(2n + 1)$ частей, т.е. число дополнительных частей меньше, чем уже имеющихся, мы вправе, как было показано, рассматривать только оптимальный способ разрезания и делить каждую часть ровно пополам. Предположим, что это допустимо, тогда:

– режем часть a ; получаются части b , c , ..., h , $a/2$, $a/2$, откуда видно, что $b < a/(2R)$;

– разрезав часть b , мы видим, что $c < b/(2R) < a/(4R^2)$;

– дойдя таким образом до части h (она $(n+1)$ -я по счету), мы видим, что $h < a/(2R)^n$.

Но, с другой стороны, мы знаем, что $h > aR$. Таким образом, $aR < a/(2R)^n$, или

$$2^n R^{n+1} < 1. \quad (**)$$

Это необходимое условие для того, чтобы сыр можно было разделить на $(2n + 1)$ частей.

Отсюда, между прочим, становится более понятно, почему при $R = 1/2$ сыр можно делить неограниченно – неравенство $(**)$ выполнено при любом n . С другой стороны, отсюда легко следует, что при любом $R > 1/2$ процесс непременно оборвется (при достаточно большом n выполнено $(2R)^{n+1} > 2$, т.е. неравенство

$(**)$ нарушится), причем можно указать число частей, на которые сыр заведомо разделить нельзя.

Пример. Пусть $R = 0,6$. На сколько частей можно разделить сыр?

Решение. Согласно $(**)$, сыр нельзя разделить на 7 частей, ибо в данном случае $2^3 R^4 = 8 \cdot 0,1296 > 1$. Остается проверить, можно ли его разделить на 6 частей.

Как видно из предыдущих рассуждений, главное здесь – понять, как его аккуратно разделить на 3 части. Подходит, например, деление на три части, веса которых относятся как 25:20:16. В самом деле, примем для удобства, что исходный кусок сыра составляет 61 единицу; тогда нужно сначала разрезать его в отношении 36:25, затем больший кусок разрезать на 20 и 16 и, наконец, поочередно разделить каждую из трех имеющихся частей 25, 20, 16 пополам. Очевидно, при $R = 0,6$ все разрезы произведены правильно.

Завершим наш рассказ несколькими задачами для самостоятельного размышления.

1. Каким соотношениям должны удовлетворять числа r и s , чтобы для них существовало оптимальное разрезание?

2. Является ли оценка $(**)$ точной? Иными словами: верно ли, что если неравенство $(**)$ выполнено, то сыр всегда можно разрезать на $(2n + 1)$ частей (и, соответственно, также и на $(2n + 2)$ частей)?

Из нашего рассуждения видно, что это удастся сделать, если сыр удалось разрезать на $(n + 1)$ частей и эти части «хорошо подобраны» – так, чтобы всякий раз оказывалось, что $b < a/(2R)$, $c < b/(2R)$ и т.д. Но то, что разрезать так удастся, отнюдь не очевидно. В качестве упражнения разберитесь в следующей задаче.

3. На сколько частей можно разрезать сыр, если $R = 5/8 = 0,625$?

(Оценка $(**)$ говорит, что не более чем на 6, но можно ли разрезать на 6?)

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

25. а) Петя пишет в каждой клетке доски 100×100 буквы А или Б так, чтобы букв А и Б было поровну. Затем Вася передвигает по этой доске фишку, сдвигая ее все время только в соседнюю по стороне клетку и каждый раз записывая, на какой букве она стоит. Всегда ли Вася может так поставить фишку и так обойти ею все клетки ровно по одному разу, чтобы полученная последовательность букв одинаково читалась слева направо и справа налево?

б) То же самое, но доска 101×101 и букв А на одну больше, чем букв Б.

Г.Никитин

26. Каждую вершину прямоугольника (не квадрата) отразили симметрично относительно диагонали, не проходящей через эту вершину. Получили четыре точки.

а) Докажите, что эти четыре точки образуют прямоугольник.

б) Могут ли они быть вершинами прямоугольника, равного исходному?

в) Могут ли они быть вершинами прямоугольника, подобного, но не равного исходному?

С.Дворянинов

27. – Поделил я как-то одно натуральное число на другое с остатком, – рассказывал Петя Коле. – Когда же я поделил квадрат первого числа на второе, остаток оказался вдвое больше, чем был при первом делении. А когда я поделил куб первого числа на второе, остаток стал уже втрое больше.

– Ну, это ты заливаешь, такого не может быть! – воскликнул Коля. – Вот со мной действительно была похожая история. Я тоже поделил одно натуральное число на другое с остатком. И когда я поделил куб первого числа на второе, остаток оказался вдвое больше первоначального, а когда поделил квадрат первого числа на второе, остаток стал втрое больше.

– Теперь уже ты сочиняешь! – заявил Петя.

Кто прав в каждом случае?

И.Акулич

28. Каких натуральных чисел больше: 10-значных с суммой цифр 9 или 9-значных с суммой цифр 10? На сколько?

С.Костин

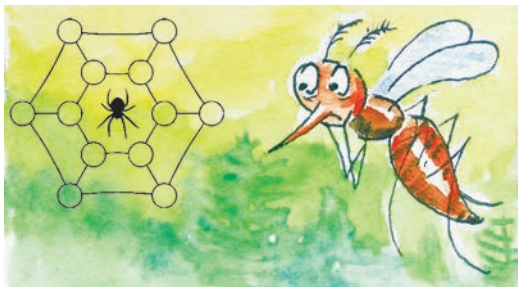
ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Открылась регистрация на XXIV Турнир математических боев имени А.П.Савина для школьников, закончивших 6–9 классы. Турнир пройдет с 26 июня по 2 июля 2018 года на базе отдыха «Берендеевы поляны» (Костромская область). Это лично-командное соревнование, основу мероприятия составляет турнир математических боев. В программу входят также различные математические состязания, интеллектуальные игры, культурные мероприятия.

О порядке проведения турнира и регистрации можно прочитать по ссылке <http://tursavin.ru/info.html>

Задачи

1. Паук сплел паутину, и в каждый из ее 12 узелков попалось по мухе или комару. При этом каждое насекомое оказалось соединено отрезком паути-



ны ровно с двумя комарами. Нарисуйте пример, как это могло быть (написав внутри узелков буквы М и К).

А.Шаповалов

2. Незнайка выписал семь двузначных чисел в порядке возрастания. Затем одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось вот что:

ХА, АЙ, АХ, ОЙ, ЭМ, ЭЙ, МУ

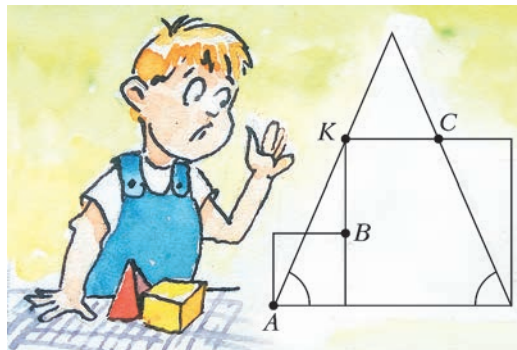
Докажите, что Незнайка что-то перепутал.

Е.Бакаев



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXIX Математическом празднике.



3. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина K большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки A , B и C лежат на одной прямой.

М.Евдокимов

4. Шесть математиков пошли на рыбалку. Вместе они наловили 100 рыб, причем все поймали разное количество. После рыбалки они заметили, что любой из них мог бы раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у остальных пятерых стало поровну рыб. Докажите, что один рыбак может уйти домой со своим уловом и при этом снова каждый оставшийся сможет раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у них получилось поровну.

А.Шаповалов



Канатоход Толи Втулкина

С.ДВОРЯНИНОВ

НА ПРОШЛОЙ НЕДЕЛЕ МЫ ВСЕМ КЛАС-сом ходили в цирк. Впечатлений – море! На обратном пути, конечно, обсуждали увиденное. Больше всего всех поразили канатоходцы. Кто-то вспомнил, что в 2012 году американский воздушный акробат Ник Валленда первым в мире перешел по канату над Ниагарским водопадом, а вскоре (без страховки) покорил и Гранд-Каньон. Несколькими годами позже, в 2016 году, знаменитый китайский канатоходец Адили Вуксор и его напарник, идя навстречу друг другу, преодолели 800 метров по натянутому тросу над рекой Хуанхэ. В этом шоу напарник Вуксора в момент встречи лег на канат, а канатоходец перешел через него, наступив ему на грудь.

Сохранять равновесие человеку на канате помогает длинный шест. Канатоходец удерживает шест в горизонтальном положении перед собой. При наклоне влево следует этот шест отвести вправо. И наоборот: при наклоне вправо шест смещается влево. В итоге во время движения канатоходца центр тяжести системы «человек плюс шест» неизменно оказывается над канатом. Подобным же образом следует управлять шестом, реагируя на возможные порывы ветра. Но обычно канатоход-

цы выполняют свои трюки в тихую безветренную погоду. Иногда для удержания каната, по которому движется смельчак, используют дополнительные стабилизирующие канаты, препятствующие раскачиванию.

По раскачивающемуся канату не то что идти опасно, на него и приземлиться-то, точнее «приканатиться», трудно. Даже птицы знают об этом и потому стараются усесться на ту часть провода, которая ближе к столбу – здесь амплитуда колебаний меньше.

У каждого человека есть орган, который обеспечивает его равновесие. Название этого важного органа – вестибулярный аппарат. Он представляет собой систему каналов, наполненных жидкостью. При наклоне или повороте головы жидкость перетекает туда-сюда, нервные клетки реагируют на изменение давления и передают сигнал в головной мозг. Даже с закрытыми глазами мы понимаем, в каком положении находимся, и поэтому можем перемещаться в полной темноте.

Но хождение по канату – не только развлечение или захватывающее зрелище. Легенды гласят, что для жителей гор умение ходить по канату было жизненной необходимостью. Представьте, что вам надо перебраться с одного края ущелья на другой. Или преодолеть бурную горную реку. Мост тут не построить. А вот натянуть канат, привязав его к деревьям или закрепив камнями, вполне возможно.

Особую славу в мастерстве передвигаться по канату снискали жители Дагестанского села Цовкра. В интернете вы легко найдете и фото, и видео. Кто-то из мастеров этого искусства, двигаясь по канату, удерживает зубами поднос, а на нем – две полные чайные чашки. У друго-





го канатоходца завязаны глаза. А третий устроился ... в тазике! Сидя в нем, с помощью ног он передвигается вперед. Но у всех в руках непрменный шест-балансир. Из Цовкри вышло немало эквилибристов, выступавших по всему миру и принесших славу нашей стране.

Потом кто-то из нас вспомнил и про популярные в горах современные канатные дороги. В основном они бывают двух видов. Одни – канатно-кресельные. На других, более мощных, на канатах подвешены целые вагоны, наподобие трамвайных. Только колеса находятся не внизу, а над вагоном, точнее – над канатом. И катятся они по канату, как по рельсу. И здесь уже каждый может прокатиться – либо в кресле, либо в вагончике. Вполне комфортно и без всякого риска.

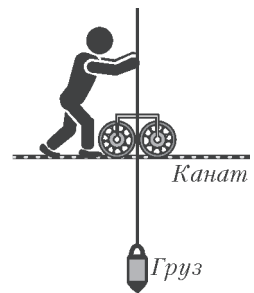
Но тут наш учитель Иван Петрович предложил нам подумать: а как еще мож-



но передвигаться по канату? Скажем, над рекой. Срок работы над проектом – неделя. Задание не для всех, а для желающих.

Через неделю на заседании школьного физического кружка мы защищали свои проекты. Я предложил каждому ступающему на канат давать в руку шарик, наполненный гелием (такие воздушные шарики сейчас часто можно увидеть). Были и другие разработки. Но лучшей все признали конструкцию Толи Втулкина.

Принцип действия его конструкции понятен из рисунка. По канату (точнее, по металлическому тросу) едет небольшая двухколесная тележка (как велосипед). На каждом колесе – желоб, в котором располагается канат. А не падает тележка влево-вправо потому, что с ней жестко связан длинный стержень с грузом-балансиром на конце. Ясно, что при любом отклонении тележки от вертикальной плоскости груз-противовес поднимается вверх. В итоге центр тяжести всей системы поднимается вверх, следовательно, исходное положение равновесия тележки – устойчивое. Человек, находящийся на канате, должен держаться за этот стержень и одновременно толкать тележку вперед. Толик предложил и несложные расчеты, из которых следует, что, желая уменьшить вес груза, мы должны увеличить длину стержня. И наоборот. Если стержень короткий, то груз-противовес для обеспечения устойчивости должен быть достаточно большим. Этот противовес действует так же, как киль яхты, удерживающий ее от опрокидывания.



достаточно большим. Этот противовес действует так же, как киль яхты, удерживающий ее от опрокидывания.

– Так это же получается посох для движения по канату! Пожалуй, и пользоваться им не так уж сложно! – таков был итог нашего обсуждения.

– Пожалуйста, – согласился с нами Толя. Хотите – говорите *посох*, хотите – *канатоход*!

Полуправильные замощения плоскости

Среди правильных многоугольников только три – треугольник, квадрат и шестиугольник – таковы, что их одинаковыми копиями можно замостить всю плоскость без пробелов и наложений. Действительно, пусть плоскость удалось замостить правильными k -угольниками и в каждой вершине (*узле* замощения) сходится по n многоугольников.¹

Поскольку угол правильного k -угольника есть $\alpha_k = \frac{(k-2)180^\circ}{k}$, получаем уравнение $n\alpha_k = \frac{n(k-2)180^\circ}{k} = 360^\circ$, откуда $k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2} \leq 6$. Случаи $k = 3, 4, 6$ реализуются, а случай $k = 5$ (попытка замостить плоскость правильными пятиугольниками) дает нецелое значение n .

Разрешим теперь использовать в замощении разные правильные многоугольники. При этом потребуем, чтобы два соседних многоугольника стыковались только по целой стороне или одной вершине, а также чтобы *все узлы замощения были устроены одинаково*, т.е. в каждой вершине сходились такие же многоугольники в таком же или в зеркально симметричном порядке, что и в любой другой вершине. Такое замощение плоскости назовем *полуправильным* или *архимедовым*.

Сколько всего есть различных архимедовых замощений?

Сначала определимся, сколько многоугольников может сходиться в узле (помним, что все узлы одинаковы). Поскольку $\alpha_k \geq 60^\circ$, больше шести в 360° не влезет.

Случай 1: в узле сходятся три многоугольника с углами $\alpha_n, \alpha_m, \alpha_k$. Тогда из $\alpha_n + \alpha_m + \alpha_k = 360^\circ$ получаем $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$. Будем считать, что $n \leq m \leq k$: тогда

первая дробь самая большая, и она не меньше одной трети от суммы, т.е. $\frac{1}{6}$. Отсюда $n \leq 6$. С другой стороны, $n \geq 3$, поэтому сумма двух других слагаемых не меньше $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, причем $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{12}$. Значит, $m \leq 12$. Значение k оценить не удастся, зато оно однозначно определяется значениями n и m : $k = \frac{2nm}{nm - 2n - 2m}$. Теперь мы можем найти все решения подбором, а это дело лучше поручить компьютеру. Вот какие решения выдает программа:

(3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15),
(3,12,12), (4,5,20), (4,6,12), (4,8,8),
(5,5,10), (6,6,6).

Решений много, не все из них реализуются как замощения плоскости. Заметим, что если m и k различны, то n должно быть четно: вокруг n -угольника в замощении чередуются m - и k -угольники. Это соображение отбрасывает первые 4 решения; аналогично отбрасываем решения (4,5,20) и (5,5,10). Оставшиеся решения реализуются: (3,12,12) – рисунок 8; (4,6,12) – рисунок 7; (4,8,8) – рисунок 5; (6,6,6) – рисунок 3.

Случай 2: в узле сходятся четыре многоугольника. Тогда равенство $\alpha_n + \alpha_m + \alpha_k + \alpha_l = 360^\circ$ дает $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$, и, считая $n \leq m \leq k \leq l$, получаем оценки на n, m, k (так же, как и в случае 1): $n, m \leq 4, k \leq 6$. Четвертый параметр определяется однозначно:

но: $l = \frac{nmk}{nmk - mk - mn - kn}$. Перебираем:
(3,3,4,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6), (3,4,6,4),
(4,4,4,4), (4,4,6,3).

Разных замощений здесь четыре; три из них реализуются: (3,3,6,6) на рисунке 2, (3,4,4,6) на рисунке 6, (4,4,4,4) на рисунке 1. Четверке (3,3,4,12) никакого полупра-

¹ Вообще говоря, может оказаться, что вершина одного из многоугольников в замощении попадет на сторону другого. Что делать в этом случае – смотрите в разделе «Ответы, указания, решения» в конце номера.

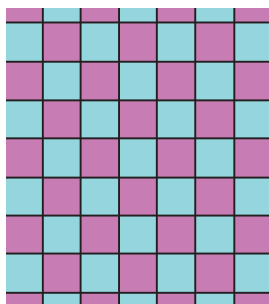


Рис. 1

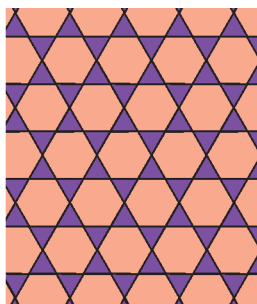


Рис. 2

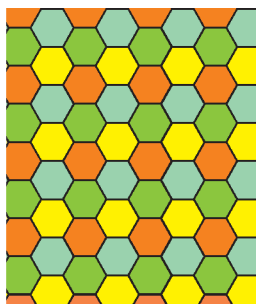


Рис. 3

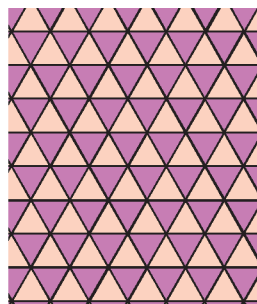


Рис. 4

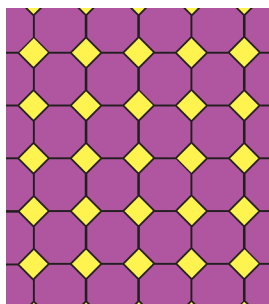


Рис. 5

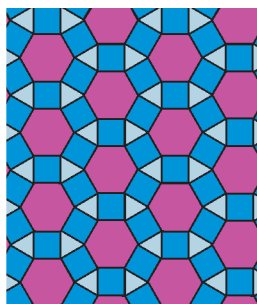


Рис. 6

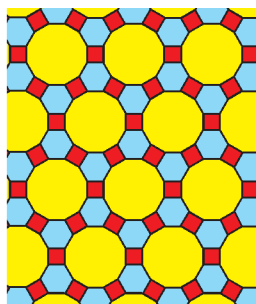


Рис. 7

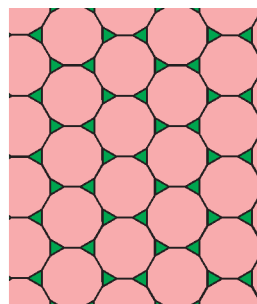


Рис. 8

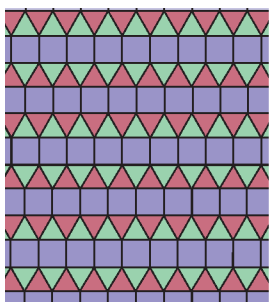


Рис. 9

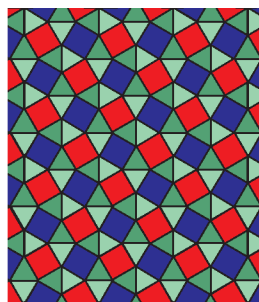


Рис. 10

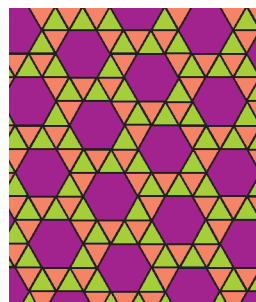


Рис. 11

вильного замощения не соответствует (проверьте это, попытавшись построить его!).

Случай 3: пять многоугольников в узле.

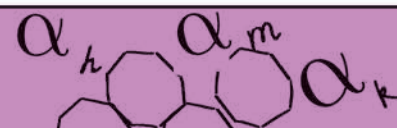
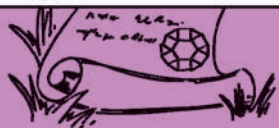
Здесь получается уравнение $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$, и мы быстро соображаем, что (при условии $n \leq m \leq k \leq l \leq p$) будет $n = m = k = 3$ (иначе не наберется $\frac{3}{2}$). Отсюда $\frac{1}{l} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$, $l \leq 4$, и мы получаем два решения: (3,3,3,3,6) и (3,3,3,4,4). Первое решение реализуется на рисунке 11, а у второго

есть аж две реализации (отличающиеся порядком многоугольников в узле): рисунки 9 и 10.

Последний случай, с шестью многоугольниками, тривиален: это могут быть только 6 треугольников (рис.4).

Итак, всего существенно разных полуправильных замощений плоскости одиннадцать.

Материал подготовил С.Кузнецов



Двое на наклонной плоскости

В.ЖБАНОВ, А.СТАСЕНКО

Природа создала мириады капель — и ни одного кирпича.

Результат внимательных наблюдений

КАК-ТО РАЗ ОКАЗАЛИСЬ НА СКАТЕ КРЫШИ кирпич и капля воды. Что же им было делать? Конечно, они чувствовали, что их поведение должно зависеть от сил, действующих на них: от силы тяжести, которая в проекции дает так называемую скатывающую силу, и от сил взаимодействия с материалом крыши (рис.1). Первая из них (актив-

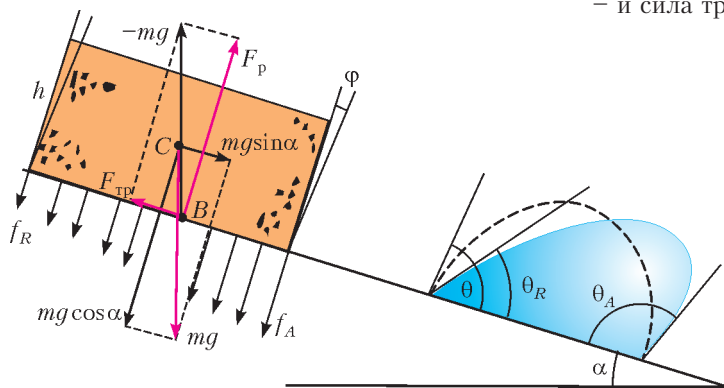


Рис. 1. Кирпич и капля неподвижны на наклонной плоскости: C — точка приложения равнодействующей сил тяготения, B — точка приложения реакции опоры

ная сила) для обоих равна $mg \sin \alpha$, а вторая (реактивная) по-разному описывается для кирпича и капли. Как известно, для взаимодействия твердых тел вводится коэффициент трения μ , для капли жидкости — угол смачивания θ .

Если угол наклона плоскости α мал, оба предмета нашего внимания остаются неподвижными. Но когда этот угол растет — до чего же различны их судьбы! Капля может

висеть и под потолком (при $\alpha = \pi$), а кирпич, к его сожалению, — нет. Но рассмотрим все по порядку.

История с кирпичом хорошо известна. Пока он неподвижен, скатывающая сила уравновешивается касательной силой трения $F_{тр}$, плотность нормальной силы реакции опоры $f_p = dF_p/dS$ считается равномерно распределенной по площади касания S , так что итоговая ее величина равна $F_p = S(f_A + f_R)/2$ (индексы: A — advancing, продвигающийся вперед, натекающий; R — receding, удаляющийся, оттекающий). По достижении критического значения α_* , при котором $F_{тр} = \mu F_p$ (это и есть определение коэффициента трения μ), или $mg \sin \alpha_* = \mu mg \cos \alpha_*$, сила трения не в состоянии компенсировать соответствующую силу скатывания — начинается движение с постоянным ускорением. Его значение

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (1)$$

растет до величины g при $\alpha = \pi/2$, в этот момент исчезает прижимающая сила, а с ней — и сила трения. На рисунке 2 изображены

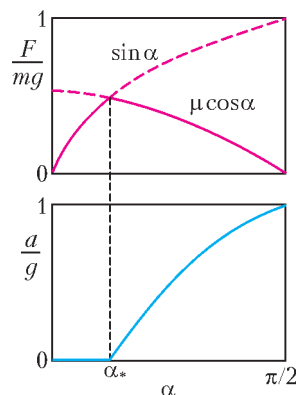


Рис. 2. Зависимости безразмерных силы F/mg и ускорения a/g от угла наклона плоскости α . При $\alpha < \alpha_* = \arctg \mu$ кирпич неподвижен, $a = 0$; при $\alpha > \alpha_*$ он движется равноускоренно; при $\alpha \geq \pi/2$ — свободно падает

зависимости суммарной касательной силы (в покое и движении) и ускорения. Все это может объяснить любой отличник.

Кирпич, хотя и тверд, но все же деформируем. Можно оценить малый угол ϕ , под которым наклонятся его передняя и задняя

грани:

$$\varphi \sim \frac{mg \sin \alpha}{ES} = \frac{\rho ghS \sin \alpha}{ES} = \frac{\rho gh \sin \alpha}{E},$$

где E – модуль упругости, или модуль Юнга (конечно, тут надо бы использовать модуль сдвига, но для оценки и этого достаточно). Подставляя характерные численные значения – плотность кирпича $\rho = (1,6 - 2,2) \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, его габариты (высота h , ширина, длина) $6,5 \times 12 \times 25 \text{ см}$, модуль Юнга $E \approx 10^9 \text{ Па}$, из приведенной выше оценочной формулы получим

$$\varphi \approx \frac{2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 0,5}{10^9 \text{ Н/м}^2} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ рад} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ град}$$

– совсем незаметную деформацию. Понятно, что это оценка для состояния покоя, а в движении вместо g надо подставить a .

А вот капля под действием скатывающей силы легко изменяет свою форму, при этом ее передний θ_A и задний θ_R углы различны и уже не равны θ . Ученые назвали разность $\theta_A - \theta_R$ гистерезисом угла смачивания. Для его описания придуманы многочисленные теоретические модели. Простейшая из них предполагает, что пятно контакта капли с поверхностью остается круглым – радиусом

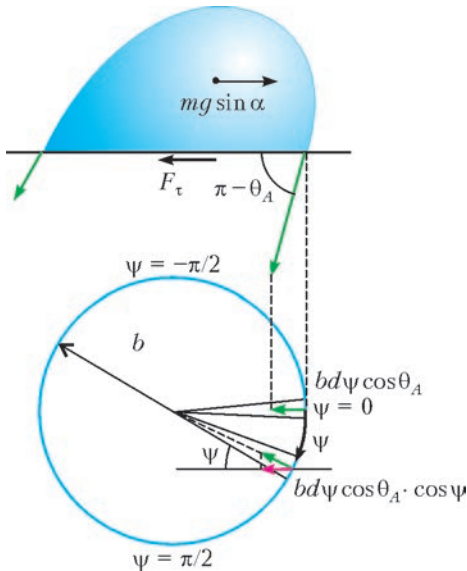


Рис. 3. К определению выражения (2) для силы адгезии капли жидкости на наклонной плоскости через углы натекания и оттекания

b на рисунке 3, причем во всех точках передней половины окружности угол смачивания равен θ_A , а на задней – θ_R . Тогда, проектируя смачивающую силу (силу адгезии), действующую на малый участок длиной $bd\psi$, на плоскость, а полученную проекцию еще раз проектируя на направление вдоль наклонной плоскости, получим

$$\begin{aligned} F_\tau &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma \cos \theta_A \cos \psi \cdot bd\psi + \\ &+ \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma \cos \theta_R \cos \psi \cdot bd\psi = \\ &= \sigma b \left(\cos \theta_A \sin \psi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \cos \theta_R \sin \psi \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) = \\ &= 2\sigma b (\cos \theta_A - \cos \theta_R). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что σb , $\cos \theta_A$ и $\cos \theta_R$ предполагаются постоянными. Понятно, что на горизонтальной плоскости $\theta_A = \theta_R = \theta$, так что $F_\tau = 0$.

Но как оценить численно этот гистерезис? Положим каплю воды на плоскость. Конечно, прежде всего следует измерить угол θ при $\alpha = 0$. В нашем случае он оказался близким к $\pi/2$. Заметим, что при $\theta < \pi/2$ поверхность считается гидрофильной (водолюбивой), а при $\theta > \pi/2$ – гидрофобной (водобоязненной). Далее, будем увеличивать угол α , измеряя при этом θ_A и θ_R , до тех пор, пока капля не начнет двигаться по наклонной поверхности. Полученные результаты пред-

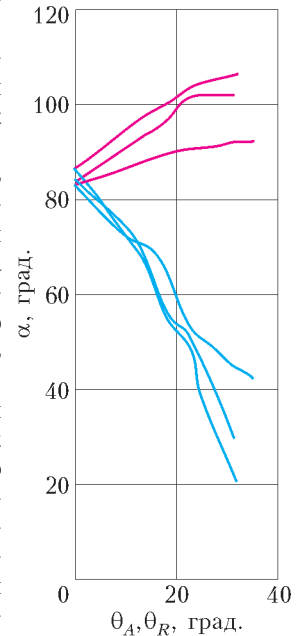


Рис. 4. Зависимости измеренных значений переднего и заднего углов смачивания – θ_A (верхние кривые) и θ_R (нижние) – от стационарного угла α для трех капель разных размеров. Концы кривых соответствуют началу движения капль

ставлены на рисунке 4. Хорошо видно, что гистерезис угла смачивания растет с увеличением α и разность косинусов в выражении (2) достигает единицы. При критическом значении α_* капля срывается с места, в ее объеме начинается движение вязкой жидкости, которая переводит часть работы силы

тяготения в тепло (за счет трения слоев друг о друга), и динамика капли становится более сложной, чем для бруска (кирпича).

А чтобы понять, что же происходит дальше, можно поступить в МФТИ или МГУ, чего вам и желаем.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Что трансформирует трансформатор?

С.ВАРЛАМОВ

КАКОЙ ТОК ПОТЕЧЕТ В ПЕРВИЧНОЙ ЦЕПИ трансформатора с известными параметрами (размеры сердечника, магнитная восприимчивость материала сердечника, число витков в первичной и во вторичной обмотках), если на первичную обмотку подано напряжение U , а к выводам вторичной обмотки подключена нагрузка, состоящая из линейных элементов с параметрами R, C, L ? Такой вопрос имеет право на существование даже в школьной физике.

Рассмотрим сначала подключение во вторичную цепь трансформатора линейных элементов радиотехнических цепей, а именно: резистора сопротивлением R , конденсатора емкостью C , катушки индуктивностью L поодиночке. Будем считать, что трансформатор идеальный в том смысле, что на холостом ходу, т.е. при отсутствии какой-либо нагрузки во вторичной цепи, магнитное поле внутри сердечника прямо пропорционально току в первичной обмотке трансформатора. Иными словами, при циклическом перемагничивании сердечника он не нагревается, т.е. гистерезис магнитного материала сердечника отсутствует. Введем параметры, которыми характеризуется трансформатор.

Предположим, что сердечник тороидальный с площадью поперечного сечения S , его длина вдоль средней линии сердечника $l \gg \sqrt{S}$ и магнитная восприимчивость материала сердечника $\mu \gg 1$. Пусть первичная обмотка трансформатора имеет N_1 витков, а вторичная обмотка имеет N_2 витков. Будем также считать, что первичная и вторичная обмотки трансформатора не имеют сопротивления.

Магнитное поле B в сердечнике трансформатора при токе в первичной обмотке I_1 и отсутствии какой-либо нагрузки во вторичной цепи можно найти с помощью теоремы о циркуляции: $Bl = I_1 \mu \mu_0 N_1$, где μ_0 – магнитная постоянная. Магнитный поток через один виток обмотки равен $\Phi_1 = BS = I_1 S \mu \mu_0 N_1 / l$. Магнитный поток через все N_1 витков первичной обмотки равен $\Phi_1 N_1$. В соответствии с законом Фарадея и правилом Ленца, в первичной обмотке возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_c = - \frac{d(\Phi_1 N_1)}{dt} = - \frac{S \mu \mu_0 N_1^2}{l} \frac{dI_1}{dt}.$$

К выводам первичной обмотки трансформатора (рис. 1) от идеального источника подведено напряжение, которое может зависеть от времени, но не зависит от наличия или отсутствия нагрузки. Пусть в данный момент времени в первичной цепи течет ток I_1 , а напряжение между выводами первичной

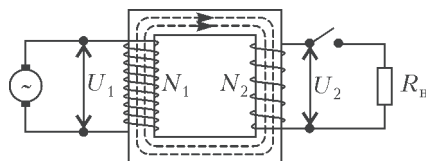


Рис. 1

обмотки равно U_1 . Связь между током холостого хода I_{xx} и напряжением U_1 дается законом Ома для замкнутой цепи:

$$U_1 + \mathcal{E}_c = 0, \text{ или } U_1 = \frac{S\mu\mu_0 N_1^2}{l} \frac{dI_{xx}}{dt}.$$

Через витки вторичной обмотки проходит магнитный поток $\Phi_1 N_2$. Напряжение между выводами вторичной обмотки равно по величине

$$U_2 = \frac{d(\Phi_1 N_2)}{dt} = U_1 \frac{N_2}{N_1}.$$

Это напряжение не зависит от наличия или отсутствия нагрузки во вторичной цепи.

Предположим, что нагрузка имеется и что ток во вторичной обмотке равен I_2 . Поскольку напряжение U_1 не зависит от нагрузки, то это означает, что скорость изменения магнитного потока через один виток тоже не зависит от нагрузки. Отсюда следует, что в любой момент времени в первичной обмотке течет такой дополнительный ток ΔI_1 , что

$$\frac{dI_{xx}}{dt} N_1 + \frac{d(\Delta I_1)}{dt} N_1 + \frac{dI_2}{dt} N_2 = \frac{dI_{xx}}{dt} N_1,$$

или

$$\Delta I_1 N_1 + I_2 N_2 = \text{const}.$$

Эту константу разумно принять равной нулю. Таким образом, магнитное поле в сердечнике определяется только током I_{xx} . Энергия, запасенная в виде магнитного поля в сердечнике трансформатора, тоже определяется только током холостого хода и не зависит от нагрузки. Это означает, что дополнительная мощность $dE/dt = U_1 \Delta I_1$, получаемая первичной обмоткой от источника напряжения, в точности равна мощности, отдаваемой трансформатором через вторичную обмотку в нагрузку. Мощность во вторичной цепи, которая может быть как положительной, так и отрицательной, равна произведению мгновенных значений тока и напряжения: $I_2 U_2$.

Если к выводам вторичной обмотки подключен резистор сопротивлением R , то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{U_2^2}{R}.$$

Если к выводам вторичной обмотки подключен конденсатор емкостью C , то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(CU_2^2/2)}{dt} = U_2 \frac{d(CU_2)}{dt}.$$

Если к выводам вторичной обмотки подключена катушка индуктивностью L , то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(LI_2^2/2)}{dt} = I_2 \frac{d(LI_2)}{dt}.$$

Выразим величины токов и напряжений с индексом 2 через соответствующие величины с индексом 1. Получатся эквивалентные замены нагрузки во вторичной цепи нагрузкой, которая подключается в первичную цепь параллельно трансформатору, работающему на холостом ходу. При этом дополнительный ток ΔI_1 должен остаться таким же, как и при нагрузке во вторичной цепи. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{U_2^2}{R} &= \frac{U_1^2}{R(N_1/N_2)^2}, \\ U_2 \frac{d(CU_2)}{dt} &= U_1 \frac{d(C(N_2/N_1)^2 U_1)}{dt}, \\ I_2 \frac{d(LI_2)}{dt} &= \Delta I_1 \frac{d(L(N_1/N_2)^2 \Delta I_1)}{dt}. \end{aligned}$$

При такой замене получается, что эквивалентной нагрузкой в первичной цепи в случае наличия резистора сопротивлением R во вторичной цепи является резистор сопротивлением

$$R_{\text{эkv}} = R \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2.$$

Для конденсатора емкостью C во вторичной цепи эквивалентной нагрузкой в первичной цепи является конденсатор емкостью

$$C_{\text{эkv}} = C \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2.$$

Для катушки индуктивностью L во вторичной цепи эквивалентной нагрузкой в первичной цепи является катушка индуктивностью

$$L_{\text{эkv}} = L \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2.$$

Поскольку зависимость напряжения первичной обмотки от времени никак не участвовала в приведенных рассуждениях, то эквивалентная замена будет одной и той же как для постоянного напряжения, так и для переменного напряжения, в том числе и для напряжения, которое меняется со временем по гармоническому закону.

Если напряжение меняется по гармоническому закону с частотой ω , то в этом случае все импедансы, т.е. активное, емкостное и

индуктивное сопротивление, вторичной цепи трансформируются в первичную цепь одинаково:

$$R_{\text{экв}} = R \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2, \quad \frac{1}{\omega C_{\text{экв}}} = \frac{1}{\omega C} \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2,$$

$$\omega L_{\text{экв}} = \omega L \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2.$$

Это означает, что для переменного тока, меняющегося не только по гармоническому, но и по любому другому закону, любая нагрузка вторичной цепи идеального трансформатора, составленная из элементов R , C , L , может быть пересчитана в первичную цепь.

Что изменится, если потери в трансформаторе будут? Например, если проволоки, которыми намотаны обмотки, имеют омические сопротивления R_1 и R_2 соответственно? В этом случае на этих сопротивлениях при протекании по ним токов будут соответствующие падения напряжения. Для расчетов можно считать, что эти сопротивления «вынесены» за пределы обмоток и включены в провода, которыми трансформатор соединяется с источником энергии и с нагрузкой во вторичной цепи, как это показано на рисунке

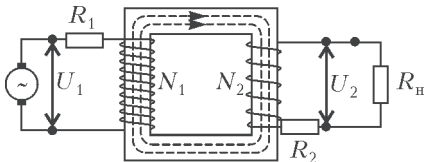


Рис. 2

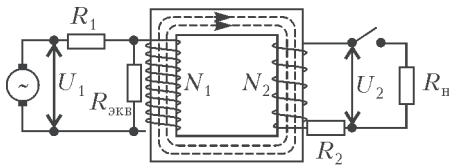


Рис. 3

2. Эквивалентная схема для такого состояния цепи приведена на рисунке 3. В первичной цепи эквивалентная замена нагрузки вторичной цепи, равная $R_{\text{экв}} = (R_2 + R_{\text{н}}) (N_1/N_2)^2$, подключается к выводам первичной обмотки, а сопротивление первичной обмотки R_1 включается в провода, идущие к источнику.

Сложнее включить в эквивалентные схемы элементы, которые бы описывали потери энергии, связанные с переманиванием

материала сердечника при наличии гистерезиса. Но, как говорится, «нельзя объять необъятного». Поэтому в построении моделей на этом остановимся и перейдем к решению практической задачи, в которой можно будет применить рассмотренные «трансформации» элементов нагрузки.

Вычислим, например, эквивалентную нагрузку для трансформатора с отношением числа витков $N_1 : N_2 = 1 : 10$. Пусть к выводам вторичной обмотки подключены параллельно резистор сопротивлением $R = 10$ кОм, конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и катушка индуктивностью $L = 10$ мкГн. Эквивалентная нагрузка в первичной цепи представляет собой параллельно соединенные резистор сопротивлением $R_{\text{экв}} = 100$ Ом, конденсатор емкостью $C_{\text{экв}} = 100$ мкФ и дроссель (катушку) индуктивностью $L_{\text{экв}} = 1$ мГн.

Вот задача, которая когда-то давным-давно давалась на Турнире юных физиков. В вольном и немного расширенном изложении ее условие звучит так:

В конденсаторе емкостью 1024 мкФ запасена энергия в форме электрического поля. Напряжение между выводами конденсатора 10 В. Имеется полупроводниковый диод, который можно считать идеальным, дроссель (катушка индуктивности), соединительные провода, ключ, а также ферромагнитный сердечник и катушка провода для намотки первичной и вторичной обмоток трансформатора. Еще есть незаряженный конденсатор емкостью 1 мкФ, в который нужно передать по возможности большую часть энергии первого конденсатора. Каким должно быть отношение числа витков первичной и вторичной обмоток трансформатора для решения поставленной задачи? Дополнительное ограничение: подключать заряженный конденсатор к созданной установке можно только один раз.

Энергия может быть практически полностью передана из одного конденсатора емкостью C_1 в другой конденсатор емкостью C_2 , если его эквивалентная замена $C_{\text{экв}}$ будет в точности равна по емкости C_1 . Схема для передачи энергии состоит из последовательно включенных в замкнутую цепь первого конденсатора, дросселя, ключа и трансформатора со вторым конденсатором

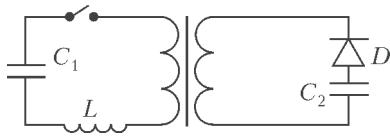


Рис. 4

и диодом во вторичной цепи (рис.4). После замыкания ключа через открытый диод заряжается второй конденсатор емкостью C_2 (или $C_{\text{эКВ}}$). Когда вся энергия переключается в этот конденсатор, диод закроется и больше не откроется, т.е. энергия окажется запертой в конденсаторе емкостью C_2 . Чтобы получить эквивалентную замену соответствующей величины, нужно, чтобы отношение числа витков в трансформаторе удовлетворяло соотношению

$$C_{\text{эКВ}} = C_2 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 = C_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = 32.$$

После такого «переброса» энергии напряжение между выводами второго конденсатора будет равно

$$U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1} = 320 \text{ В}.$$

В приведенном упрощенном решении мы пренебрегли тем, что за время перекачивания энергии из одного конденсатора в другой в сердечнике трансформатора успевает накопиться энергия в форме магнитного поля. Чтобы эта «потеря» существенно не повлияла на результат, нужно, чтобы индуктивность первичной обмотки трансформатора была во много раз больше индуктивности нашего дросселя.

ШАХМАТНАЯ СТРАНИЧКА

Искусственный интеллект учится играть в шахматы

5 декабря 2017 года случилось значительное событие в мире компьютерных шахмат: программа AlphaZero, созданная с помощью принципа машинного обучения, сыграла матч с сильнейшей шахматной программой Stockfish 8, выиграв 28 из 100 партий и сведя вничью оставшиеся 72. Отличительной чертой программы AlphaZero (разработанной компанией DeepMind, входящей в корпорацию Google) является то, что во время шахматной партии в позиционной игре она принимает решения, похожие на человеческие. Тем самым закрыл последний раздел шахматной игры, где человек еще мог соревноваться с компьютером и где шахматное понимание важнее точного расчета.

В DeepMind начали проект машинного обучения логическим играм с наиболее сложной игры – го, дерево вариантов в которой значительно шире, чем в шахматах. Разработчики написали обучающую нейронную сеть, а программа AlphaGo получила в свое распоряжение базу человеческих партий, с помощью которой обучалась игре, затем играла тренировочные партии с другими программами и в октябре 2015 года стала первой в истории

компьютерной программой, которая смогла обыграть профессионального игрока, чемпиона Европы Фань Хуэя в серьезной партии без форы. (В го развита система форовых игр, уравнивающая шансы игроков разного класса в отдельно взятой партии.) В марте 2016 года состоялся матч AlphaGo против великого корейского игрока Ли Седоля, который сравним по своему статусу в го с Гарри Каспаровым в шахматах. Из пяти партий легендарный игрок смог выиграть только одну, проиграв остальные четыре. В марте 2017 года AlphaGo сыграла матч из трех партий с сильнейшим игроком современности и действующим чемпионом мира, 20-летним Кэ Цзе из Китая, выиграв со счетом 3-0. Разработчики на этом не остановились и в октябре 2017 года представили принципиально новую версию – AlphaGoZero, ноль в названии которой символизирует отказ от использования человеческих партий при обучении нейронной сети. Вместо этого в нее просто запрограммировали правила игры, после чего предоставили возможность играть самой с собой. Обученная таким образом программа значительно прибавила в силе игры и уже через три дня обучения обыграла первую версию AlphaGo со счетом 100-0.

(Продолжение см. на 3-й с. обложки)

Доказать делимость поможет комбинаторика

А.КАНУННИКОВ

Делители биномиальных коэффициентов

Папа. У биномиальных коэффициентов много красивых свойств. Давайте взглянем на треугольник Паскаля (рис.1). Начнем с четности. Скажите, в каких строчках все числа, кроме крайних единиц, четны?

Миша. Во второй, четвертой и восьмой. Ага! Наверняка, следующей такой строчкой будет 16-я и так далее по степеням двойки, правда?

Папа. Да, Миша, твоя гипотеза верна.

Теорема 4. Числа $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ четны, если и только если n – степень двойки.

Папа. Ну что, Иван, для доказательства теоремы будешь применять формулу Лежандра?

Иван. Честно говоря, не очень хочется... Надо показать, что $C_{2^t}^k$ четно при $0 < k < 2^t$, т.е. что $v_2(2^t!) > v_2(k!) + v_2((2^t - k)!)$.

Папа. Это только в одну сторону. Надо еще доказать, что если n не степень двойки, то найдется такое $0 < k < n$, что $v_2(2^t!) = v_2(k!) + v_2((2^t - k)!)$.

Миша. Что-то непонятно...

Иван. Смотри: число $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ четно, если и только если двойка входит в разложение числителя в степени большей, чем в разложение знаменателя. Дальше – формула Лежандра (1). Но это как-то утомительно... Давайте лучше попробуем доказать теорему комбинаторно.

Напрашивается такая идея: все, что четно, разбивается на пары. Сразу отметим, что так как $C_n^1 = n$, то n можно считать

				1				
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
	1	5	10	10	5	1		
	1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Рис. 1

четным. Пусть $n = 2m$. Рассмотрим для удобства симметричное $(2m)$ -элементное множество $\{\pm 1, \dots, \pm m\}$. Каждому его подмножеству A соответствует подмножество $-A = \{-a \mid a \in A\}$ той же мощности.

Миша. Отличная идея! Я продолжу. Кажется бы, ты разбил все подмножества на пары: A и $-A$. Но ведь могут быть и такие, для которых $A = -A$, т.е. симметричные относительно 0. Значит, таких должно быть четное число, только если n – степень двойки, так?

Папа. Идея верная, молодцы! Только поправлю: для каждого $k \in \{1, \dots, 2m - 1\}$ число симметричных k -элементных подмножеств в $\{\pm 1, \dots, \pm m\}$ будет четным, если и только если m (а с ним и n) – степень двойки. В этом надо убедиться для доказательства теоремы 4.

Задача 10. Доведите описанную идею до аккуратного доказательства теоремы 4.

Задача 11. Найдите быстрый алгоритм определения четности числа C_n^k .

Папа. А теперь подумайте над такой задачей.

Задача 12. Докажите, что C_{100}^n кратно $n + 1$ для всех натуральных $n < 100$.

Братья стали решать. Иван быстро догадался и понял, к какому важному факту подводит папа. Попробуйте и вы решить задачу, не читая дальше.

Папа. Давайте взглянем еще раз на треугольник Паскаля и посмотрим на строчки, в которых $n = p$ – простое. Что вы видите?

Миша. Все числа в них, кроме крайних единиц, делятся на p . Например, при $p = 5$: 5, 10, ..., при $p = 7$: 7, 21, 35, ...

Папа. Да, это очень важное свойство биномиальных коэффициентов. Давайте его докажем.

Теорема 5. Число C_p^k кратно p при всех простых p и $k \in \{1, \dots, p-1\}$.

Иван. Ну, из формулы для C_p^k все сразу следует:

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)!}{k!(p-k)!} \div p,$$

поскольку p не входит в разложение знаменателя.

Значение этой теоремы я успел оценить на семинарах по высшей алгебре. Из нее вытекает важное следствие, на котором основана вся арифметика в полях простой характеристики, в частности, в конечных полях.

Следствие 3. Для всех целых a, b и простых p верно сравнение $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

Миша. Я пока не знаю, что такое поле, характеристика и т.д., но следствие вполне себе ясно: раскрываем скобки по биному, и все слагаемые, кроме a^p и b^p , обращаются в 0 по модулю p .

Папа. К этому важному следствию мы еще вернемся, а пока давайте решим одну красивую фольклорную задачу на делимость биномиальных коэффициентов.

Задача 13 (Московская олимпиада, 2009, 10 кл.). Докажите, что любые два отличных от единицы биномиальных коэффициента C_n^k и C_n^l не взаимно просты.

Папа. В случае простого n решение сразу вытекает из теоремы 5. Но как быть в общем случае? Чисто теоретико-числовыми средствами обойтись будет не так-то просто. Зато есть изящное комбинаторное доказательство.

Замечание. Коэффициенты $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ могут быть взаимно просты в совокупности, например, при $n = 6$:

$$\text{НОД}(C_6^1, C_6^2, C_6^3) = \text{НОД}(6, 15, 20) = 1.$$

Задача 14. а) Докажите, что $C_{2n}^n \div n+1$ и $C_{2n}^{n-1} \div n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. б) Знаете ли вы комбинаторный смысл чисел $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$? Это очень известные числа!

Обратимость ненулевых вычетов по простому модулю

Папа. Давайте вернемся к сравнениям по простому модулю p . Отметим остатки по модулю p на окружности на равных расстояниях друг от друга и поместим в нулевой остаток кузнечика. Пусть он умеет прыгать

только на d делений в любую сторону, где $1 \leq d \leq p-1$. Вопрос: при любом ли d кузнечик сможет попасть в точку 1? Понятно, что тогда он сможет попасть в любую точку. Вот пара примеров (рис. 2).

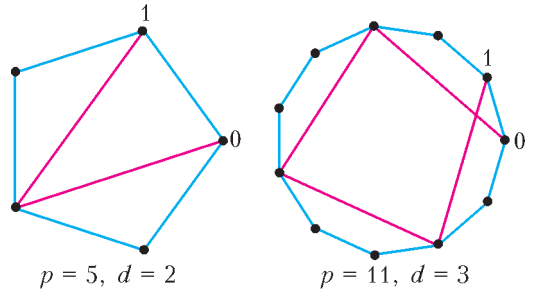


Рис. 2

Иван. Миша, понимаешь, почему папин вопрос содержателен только для простых p ?

Миша. Ну, если p составное и d – его нетривиальный делитель, то кузнечик будет прыгать только по кратным d и никак не попадет в 1. Это как раз легко.

Иван. Правильно, а теперь давай возьмем большое простое p , скажем 59, и попробуем попасть в единицу при разных d .

Миша. При $d = 2$ делаем 30 прыжков, при $d = 3$ делаем 20... Ага, вообще, если $59 + 1 = 60$ кратно d , то за $60/d$ прыжков мы сделаем один круг и окажемся в 1. Ну, а если взять $d = 7$? Тогда мы попадем в $63 \equiv 4 \pmod{59}$. Стоп! Но ведь это значит, что мы умеем прыгать на 4 деления. А сделав 15 прыжков на 4, мы сдвинемся на $15 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{59}$. Ура! С семеркой тоже ясно. Дальше аналогично?

Папа. В каком-то смысле да. Главную идею ты понял, молодец. Но надо доказать аккуратно. Вот общая формулировка.

Теорема 6. Для каждого простого p и каждого $d \in \{1, \dots, p-1\}$ существует такое целое k , что $dk \equiv 1 \pmod{p}$. Иными словами, ненулевые вычеты по простому модулю обратимы.

Миша. Я бы доказывал эту теорему так. Умножим данное d на все ненулевые остатки по модулю p : $d, 2d, \dots, (p-1)d$. Эти числа дают разные ненулевые остатки при делении на p , а значит, ровно одно из них дает остаток 1. Все просто.

Папа. А как ты объяснишь, что остатки разные?

Миша. Ну, допустим, два числа ad и bd дали один остаток, $a \neq b$. Тогда их разность $(a-b)d$ кратна p . Но оба множителя $a-b$ и d не кратны p , так как $0 < |a-b|, d < p$. Это противоречит простоте p .

Иван. Все верно, Миша, но ты опять неявно используешь основную теорему арифметики.

Папа. А она, в свою очередь, часто доказывается с помощью теоремы 6! Поэтому давайте докажем эту теорему индукцией по d при фиксированном p . Миша на примере с $d = 7$ фактически это сделал. Случай $d = 1$ тривиален: $k = 1$. При $d > 1$ разделим p на d с остатком: $p = dq + r$, где $0 < r < d$ – остаток ненулевой, ведь простое p не делится на d . Сделав q прыжков на d , мы окажемся в r , значит, мы умеем прыгать на r отметок. К числу $r < d$ применимо предположение индукции: $k'r \equiv 1 \pmod{p}$ для некоторого целого k' . Тогда $k'r = k'p - k'dq \equiv 1 \pmod{p}$ и можно взять $k = -k'd$.

Иван. На практике найти k можно алгоритмом. Знаешь его, Миша?

Миша. Конечно, с его помощью находят наибольший общий делитель чисел путем последовательного деления с остатком. В школе мы его применяли для решения диофантовых уравнений, а на кружке нам показывали его геометрический смысл с последовательным отрезанием квадрата от прямоугольника.

Иван. О, да ты все знаешь! Сравнение в теореме 6 можно записать в виде диофантова уравнения:

$$dk \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z} dk + pl = 1.$$

Его решения (k, l) (нам нужна только первая координата) ищутся алгоритмом Евклида. У него и впрямь много разных интерпретаций: отрезание квадрата, переливание воды в сосудах, вот еще папин кузнечик.

Задача 15. Решите сравнение $17x \equiv 1 \pmod{59}$ алгоритмом Евклида. Какое наименьшее число прыжков надо сделать кузнечику, чтобы попасть в 1 при $p = 59$ и $d = \pm 17$ (рассмотрите два случая).

Иван. Итак, мы разобрались, что ненулевые вычеты по простому модулю обратимы. Этот фундаментальный факт означает, что множество вычетов (т.е. остатков) по простому модулю p , оно обозначается \mathbb{Z}_p , устроено до определенной степени так же,

как множества $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ рациональных, действительных, комплексных чисел.

Миша. Погоди, Ваня, как это так же? Вычетов всего p штук, а $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – бесконечные множества...

Папа. На самом деле Иван прав. Он рассуждает с позиции высшей алгебры: множество \mathbb{Z}_p , так же, как и множества $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, замкнуто относительно четырех арифметических действий (исключая деление на ноль), обладающих стандартными свойствами. Такие множества называются *полями*.

Иван. Вот какую задачу-шутку нам дал преподаватель алгебры на первом курсе, когда знакомил нас с вычетами.

Задача 16. Целочисленную прямую наматывали на окружность длины 5 – получилось поле вычетов \mathbb{Z}_5 . На рисунке 3,а отмечены дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{7}{5}$. Можно ли их отметить на рисунке 3,б?

Папа. Да, это хорошая задача на понимание.

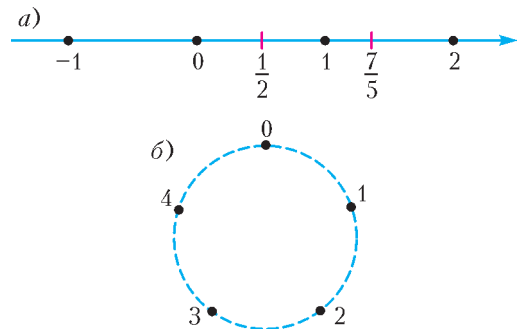


Рис. 3

Задача 17. Докажите теорему 5 комбинаторно, используя не формулу для C_p^k , а только опередление.

Подсказка. Если A – подмножество в \mathbb{Z}_p из k элементов, то $A + 1 = \{a + 1 \mid a \in A\}$. Вам понадобится теорема 6.

Папа. А сейчас я хочу вам доказать «методом кузнечика» две замечательные теоремы теории чисел.

Малая теорема Ферма и теорема Вильсона

Теорема 7 (малая теорема Ферма). Для всех простых p и целых a верно сравнение

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Папа. Это классическая, очень известная теорема, и у нее много разных доказательств.

Задача 18. Выведите малую теорему Ферма: а) из теоремы 5; б) из полиномиальной формулы (6) (см. предыдущий номер журнала).

Папа. Но я хочу вам привести комбинаторное доказательство. Давайте решим вспомогательную задачу. Допустим, перед вами правильный p -угольник и вы красите каждую его вершину в один из a фиксированных цветов. Сколько всего будет раскрасок?

Миша. Очевидно, a^p .

Папа. Правильно. А если мы не различаем раскраски, которые получаются друг из друга поворотом?

Миша. Ну, тогда ответ в p раз меньше.

Иван. Тебя не смущает, что a^p не обязано делиться на p ? Впрочем, ты почти прав.

Миша. Да, точно. Я не учел раскраски в один цвет – они ведь не изменятся, как ни крути. Таких одноцветных раскрасок a штук – по числу цветов. А остальные $a^p - a$ разбиваются на группы эквивалентных по p в каждой. Получается, всего различных раскрасок

$$a + \frac{a^p - a}{p}. \quad (7)$$

Иван. Да, теперь правильно. Подумай, поможет ли это нам доказать малую теорему Ферма?

Миша. Ого! Так ведь она отсюда сразу следует – ведь число раскрасок должно быть целым! Ничего себе...

Папа. Да, совершенно верно. Осталось только понять, где ты использовал простоту p ...

Иван (подмигивая папе). Наводящий вопрос: при чем тут кузнечик?

Задача 19. Подумайте вместе с Мишей над этими вопросами. Докажите аккуратно, что при простом p у каждой из $a^p - a$ неодноразовых раскрасок ровно p эквивалентных (которые получаются из нее поворотами).

Задача 20. Легко видеть, что при составном p ответ (7) неверен. Скажем, при $p = 4$, 6 это число нецелое для $a = 2$. Решите задачу о раскрасках для $p = 4, 6$. А может быть, вы знаете ответ и для любого числа вершин?

Папа. А теперь докажем похожим образом теорему Вильсона.

Теорема 8 (теорема Вильсона). Для всех $p > 1$:

$$p - \text{простое} \Leftrightarrow (p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Иван. Критерий, конечно, интересный, но неэффективный: с его помощью весьма трудно проверять простоту числа p .

Папа. Иван прав, но тем не менее критерий Вильсона имеет важное теоретическое значение. Давайте пойдем, как комбинаторно получить $(p - 1)!$.

Миша. Это число перестановок $p - 1$ элементов.

Папа. Именно. Обратимся снова к правильному p -угольнику и рассмотрим замкнутые ориентированные ломаные, проходящие через все его вершины. Например, при $p = 3$ их две (рис. 4).

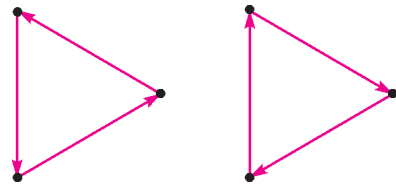


Рис. 4

Несложно понять, что в общем случае их $(p - 1)!$. Теперь, как и в задаче с раскрасками, будем считать ломаные, получаемые друг из друга поворотом, эквивалентными. Сможете закончить рассуждение?

Задача 21. Сосчитайте число неэквивалентных ломаных, и вы докажете главную импликацию \Rightarrow в теореме Вильсона.

Подсказка. Сколько ломаных эквивалентно ломаным на рисунке 5 ($p = 7$)?

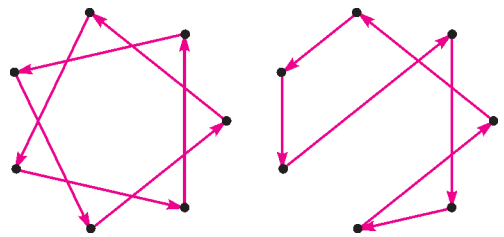


Рис. 5

Задача 22. Докажите эту же импликацию другими способами: а) непосредственно с помощью теоремы 6; б) с помощью малой теоремы Ферма, исследуя связь многочленов $x^p - x$ и $x(x - 1)(x - 2)\dots(x - p + 1)$.

Задача 23. Докажите импликацию \Leftarrow в теореме Вильсона.

Региональный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике

Региональный этап Всероссийской олимпиады проводился 31 января и 1 февраля 2018 года во всех регионах России.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратики каждого размера было одно и то же количество.

Методкомиссия

2. На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трех из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

С.Берлов, Д.Храмцов

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M – середина отрезка BC . Найдите угол DME .

А.Кузнецов

4. Кондитерская фабрика выпускает N сортов конфет. На Новый год фабрика подарила каждому из 1000 учеников школы подарок, содержащий по конфете нескольких сортов (составы подарков могли быть разными). Каждый ученик заметил, что для любых 11 сортов конфет он получил конфету хотя бы одного из этих сортов. Однако оказалось, что для любых двух сортов найдется ученик, получивший конфету ровно одного из этих двух сортов. Найдите наибольшее возможное значение N .

Д.Храмцов

5. Числа x , y и z удовлетворяют условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x - y)(y - z)(x - z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Л.Емельянов, методкомиссия

6. На бесконечной ленте бумаги выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте?

Методкомиссия

7. Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зеленых фишек, причем фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки или стоящие рядом синюю и зеленую фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов?

С.Берлов

8. Сережа выбрал два различных простых числа p и q . Он считает натуральное число n *хорошим*, если число $p + q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k . (Например, если бы Сережа выбрал $p = 7$ и $q = 3$, то он бы считал число $n = 2$ *хорошим*, поскольку $7 + 3 = 2^3 + 2^0 + 2^0$.) Докажите, что Сережа считает хорошими не более двух чисел.

С.Волчёнков

9. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X , а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y . Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY . Докажите, что l касается ω .

А.Кузнецов

10. См. задачу M2505 «Задачника «Кванта»».

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. См. задачу M2502 «Задачника «Кванта».

3. Положительные числа x, y таковы, что $x^5 - y^3 \geq 2x$. Докажите, что $x^3 \geq 2y$.

Н. Агаханов

4. Пусть O – центр окружности Ω , описанной около остроугольного треугольника ABC . На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B , взята точка P . На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BXP , лежит на окружности, описанной около треугольника ABO .

И. Фролов

5. Дано нечетное число $n > 10$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \dots, n$ так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел. (Способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.)

Д. Храмов

6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \dots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d . Докажите, что среди выписанных дробей найдется дробь, равная числу $d - 1$.

Б. Обухов

7. Из четырех одинаковых треугольников сложен выпуклый четырехугольник. Верно ли, что у этого четырехугольника обязательно есть параллельные стороны?

Методкомиссия

8. Дана клетчатая доска 1000×1000 . Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьет все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x , за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

И. Богданов

9. См. задачу M2504 «Задачника «Кванта».

10. См. задачу M2503 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку и соединили ее со всеми вершинами. Какое наибольшее число из десяти проведенных отрезков (пяти сторон и пяти отрезков, соединяющих отмеченную точку с вершинами пятиугольника) может иметь длину 1?

А. Кузнецов

2. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы?


И. Богданов

3. Дан неравносторонний треугольник ABC , в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M – середина отрезка AC . Точка O – центр окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D . Докажите, что центр окружности Γ , описанной около треугольника BOD , лежит на прямой AC .

А. Кузнецов

4. Изначально на доску выписали числа $1 - \sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x, y и z , а вместо них на доску записываются числа $x^2 + xy + y^2$, $y^2 + yz + z^2$ и $z^2 + xz + x^2$. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными?

С. Кудря

5. Назовем *лодочкой* трапецию  с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадрата двух треугольников (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (ее можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, ее средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т.е. пе-

ресечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку?

С.Берлов, Н.Власова

6. См. задачу 6 для 10 класса.

7. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно четная?

О.Подлипский

8. См. задачу 9 для 10 класса.

9. См. задачу 10 для 9 класса.

10. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A , а на сфере ω_2 – фиксированная точка B . На сфере ω_1 выбирается переменная точка X , а на сфере ω_2 – переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере.

А.Кузнецов

*Публикацию подготовили
Н.Агаханов, И.Богданов,
П.Кожевников, О.Подлипский*

Региональный этап LII Всероссийской олимпиады школьников по физике

В региональном этапе олимпиады приняли участие 6517 школьников из 9 – 11 классов. Всем участникам предлагалось за 5 часов решить 5 задач. Максимальное число баллов, которое мог набрать каждый из участников, составляло 80. По результатам проверки работ на заключительный этап олимпиады, который пройдет в апреле в Тюмени, приглашаются участники, набравшие следующие баллы: 9 класс – 55 и более баллов, 10 класс – 63 и более баллов, 11 класс – 67 и более баллов.

Одновременно проходила Олимпиада имени Максвелла для учащихся 7 и 8 классов. Заключительный этап этой олимпиады пройдет в апреле в Сочи в образовательном центре «Сириус».

Ниже приводятся условия задач обеих олимпиад.

7 класс¹

Задача 1. Длина удава

Отдыхая на одном экзотическом острове, экспериментатор Глюк взял напрокат скутер, основная шкала спидометра которого

была проградуирована в привычных для местного населения единицах измерения скорости – удавах в минуту. Хозяин проката, желая пойти навстречу иностранным туристам, выяснил, что по принятой в Европе Международной системе единиц (СИ) скорость должна измеряться в метрах в секунду, и рядом с местной шкалой нанес «обще-принятую» европейскую (рис.1). Опреде-

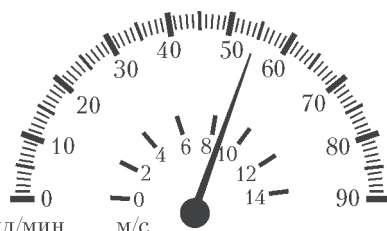


Рис. 1 уд/мин м/с

лите: на какую максимальную скорость (в км/ч) рассчитана экзотическая шкала спидометра скутера; чему равны (в км/ч) показания спидометра на рисунке; какова длина местных удавов, выраженная в метрах?

Задача 2. На речке

Двигаясь вниз по реке, лодка под мостом обогнала плот. Через некоторое время она

¹ Автор всех задач для 7 и 8 классов – М.Зямтнин.

доплыла до пристани, быстро развернулась и, с прежней относительно воды скоростью, поплыла вверх по течению, где снова встретила плот на расстоянии $s_1 = 1100$ м от моста. Если бы с момента первой встречи с плотом лодка плыла с вдвое большей скоростью относительно воды, то их вторая встреча произошла бы на расстоянии $s_2 = 600$ м от моста. Определите, во сколько раз скорость лодки больше скорости течения реки и на каком расстоянии от моста находится пристань.

Задача 3. Стержень

Половина (по длине) длинного стержня имеет линейную плотность $\lambda_1 = 60$ г/дм, а вторая половина – $\lambda_2 = 20$ г/дм. Стержень разрезали поперек на две равные по массе части. Чему оказались равны средние линейные плотности получившихся частей?

Примечание. Линейной плотностью протяженных тел λ называют массу единицы их длины.

Задача 4. Окаменевшая жидкость

Если в сосуд объемом V_0 , доверху заполненный жидкостью, опускать камни плотностью $\rho = 2,2$ г/см³, то в зависимости от их объема V ($V < V_0$) средняя плотность содержимого сосуда будет изменяться так, как показано на рисунке 2. Определите объем сосуда V_0 и плотность жидкости ρ_0 .

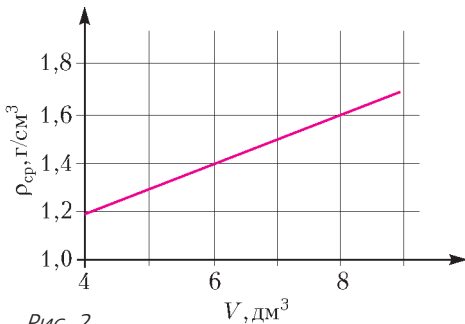


Рис. 2

8 класс

Задача 1. Ни два, ни полтора...

Автомобиль проехал треть пути со скоростью $v = 46$ км/ч. Затем четверть времени всего движения он ехал со скоростью, в полтора раза превышающей среднюю на всем пути. На последнем участке автомобиль ехал со скоростью $2v$. Определите максимальную скорость автомобиля.

Задача 2. Проволока

Длинная проволока состоит из трех частей, соединенных последовательно друг за другом. Первая часть длиной в четверть от длины всей проволоки имеет линейную плотность $\lambda_1 = 30$ г/дм. Вторая часть массой в треть от массы всей проволоки имеет линейную плотность λ_2 . Масса третьей части равна сумме масс первых двух. Определите среднюю линейную плотность $\lambda_{\text{ср}}$ всей проволоки. Какая минимальная линейная плотность λ_2 может быть у второй части проволоки?

Примечание. Линейной плотностью протяженных тел λ называют массу единицы их длины.

Задача 3. Жидкое равновесие

Прямоугольный легкий сосуд с жидкостью массой m помещен на однородный рычаг массой $3m$ (рис.3). В жидкость опущено тело

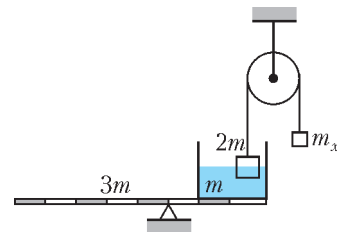


Рис. 3

массой $2m$, не касающееся дна сосуда и удерживаемое нитью, перекинутой через блок (рис.3). Груз какой массы m_x необходимо подвесить к противоположному концу нити для равновесия всей системы? Трения в осях рычага и блока нет. Необходимые расстояния можно взять из рисунка.

Задача 4. Быстрее, но медленнее

Чайник с водой при температуре $t_0 = 20$ °C нагрелся на газовой горелке до $t_1 = 40$ °C за время $\tau_1 = 2$ мин. Железя ускорить нагрев, половину воды вылили, и еще через $\tau_2 = 1$ мин температура воды достигла $t_2 = 55$ °C. Так как и это показалось медленным, вылили еще половину оставшейся воды, но при этом случайно заделали кран горелки, вдвое убавив ее мощность. Через какое время τ_3 чайник все-таки нагреется до $t_3 = 100$ °C? Потерями тепла в окружающую среду можно пренебречь.

9 класс

Задача 1. Безопасная дистанция

По прямому участку дороги с одинаковой скоростью v друг за другом едут две машины, одна из которых при торможении может двигаться с предельным ускорением a_1 , а другая – с a_2 . Если с постоянным ускорением до полной остановки начинает тормозить водитель передней машины, то водитель задней реагирует и нажимает на педаль тормоза не сразу, а с задержкой $\tau = 0,3$ с. В зависимости от того, какая из машин едет впереди, безопасные дистанции, исключающие столкновение между ними, оказываются равными $L_1 = 6$ м или $L_2 = 9$ м. Определите, с какой скоростью едут машины. Оцените разность ускорений Δa машин, если известно, что сами ускорения примерно равны 5 м/с^2 .

М.Замятнин

Задача 2. Масса поршня

Цилиндрический сосуд с поршнем соединен коническим переходником с трубкой постоянного сечения (рис.4). Разность уровней воды в правом и левом колена $h = 20$ см. В трубку медленно наливают воду, измеряя объем V добавленной воды и подъем уровня y в правом колена. С помощью графика зависимости V от y (рис.5) найдите массу поршня и объем конической части сосуда. Трение

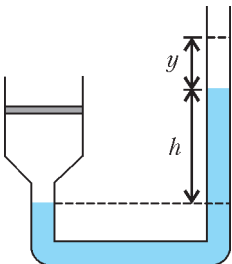


Рис. 4

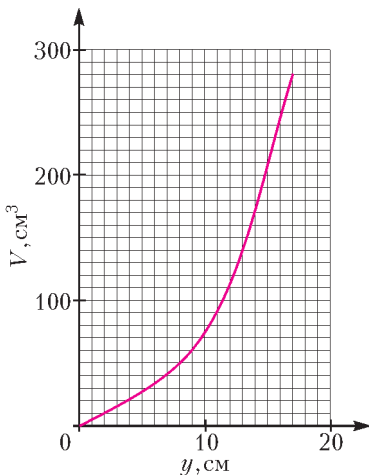


Рис. 5

между поршнем и цилиндром не учитывайте. Плотность воды $\rho = 1,0 \text{ г/см}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

И.Воробьев

Задача 3. Жидкое равновесие

Прямоугольный легкий сосуд с жидкостью массой m помещен на однородный рычаг массой $4m$ (рис.6). В жидкость опущено тело массой $2m$ (с плотностью меньшей, чем плот-

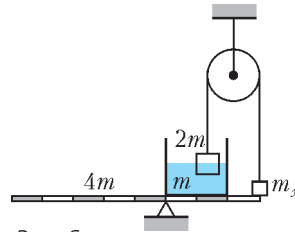


Рис. 6

ность жидкости), удерживаемое нитью, перекинутой через блок. Груз какой массы m_x необходимо прикрепить к противоположному концу нити и разместить на краю рычага, чтобы система осталась в равновесии? Трение в осях рычага и блока нет. Необходимые расстояния можно взять из рисунка.

М.Замятнин

Задача 4. Электротермодинамика

Два цилиндрических проводника разной длины, но одинакового диаметра изготовлены из меди. Их сопротивления и температуры (в градусах Цельсия) равны R_1, R_2, t_1, t_2 соответственно. Проводники соединяют плоскими гранями (рис.7). Каким окажется сопротивление составного проводника после того, как температуры его частей выровняются? Теплообменом с окружающей средой и тепловым расширением меди пренебречь.

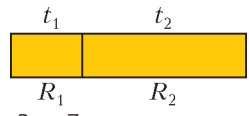


Рис. 7

Примечание. Сопротивление проводника при температуре t равно $R = R_0(1 + \beta(t - t_0))$, где R_0 – сопротивление проводника при $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, β – температурный коэффициент сопротивления, причем $\beta t \ll 1$.

В.Югов

Задача 5. Электрический тетраэдр

В ребра тетраэдра $ABCD$ включены три амперметра с внутренним сопротивлением $R_A = 0,1 \text{ Ом}$ и три вольтметра с внутренним

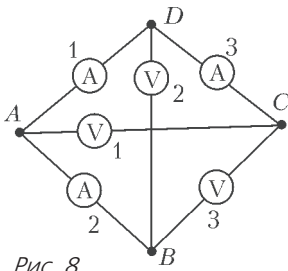


Рис. 8

сопротивлением $R_V = 10$ кОм (рис. 8). Определите показания всех приборов при подключении источника с напряжением $U_0 = 1,5$ В: а) к точкам A и D; б) к точкам B и C.

А.Аполонский

10 класс

Задача 1. Просто трение

На ледяной горизонтальной поверхности лежит лист фанеры, на котором находится стальной брусок (рис.9). Одновременно ли-

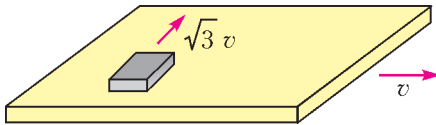


Рис. 9

сту фанеры и бруску сообщают скорости v и $\sqrt{3}v$ относительно льда, причем их направления взаимно перпендикулярны. В процессе дальнейшего движения, из-за наличия трения, скорости бруска и фанеры изменяются. Определите минимальные скорости фанеры и бруска (относительно льда) в процессе их движения. Масса бруска равна массе фанеры.

А.Аполонский

Задача 2. Расталкивание

На горизонтальной поверхности покоятся два бруска массой M каждый (рис.10). Между брусками помещают тележку массой

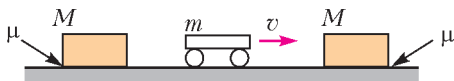


Рис. 10

$m = M/3$ и сообщают ей начальную скорость v . Найдите, на сколько сдвинутся бруски в результате абсолютно упругих столкновений с тележкой, если за время между столкновениями они успевают останавливаться. Время соударения тележки с брусками бесконечно мало. Коэффициент трения между брусками и поверхностью равен μ . Ускорение свободного падения равно g .

И.Воробьев

Задача 3. Из глубин...

Со дна глубокого озера всплывает пузырек воздуха. На него действует сила сопротивления $F = krv$, где r – радиус пузырька, v – его скорость, k – постоянная. Вблизи дна радиус пузырька $r_0 = 1,0$ мм. На рисунке 11 представлен график зависимости глубины h (в условных единицах), на которой находится

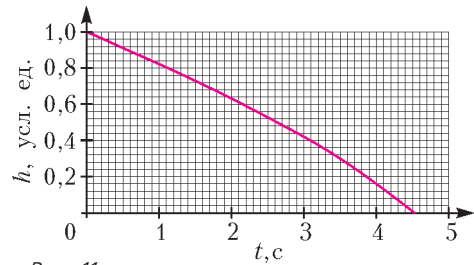


Рис. 11

пузырек, от времени t , прошедшего от начала его движения.

1) Какова глубина озера?

2) За какое время τ_1 всплывет пузырек, радиус которого у дна водоема равен $r_1 = 0,5$ мм?

3) За какое время τ_2 пузырек, радиус которого у дна водоема равен $r_0 = 1,0$ мм, всплывет со дна водоема глубиной $H = 10$ м?

Примечание 1. Давление водяных паров в пузырьке, поверхностное натяжение воды, изменение формы пузырька и изменение температуры воздуха в пузырьке не учитывайте.

Примечание 2. Плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3$ кг/м³, атмосферное давление $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Па, $g = 10$ м/с², объем пузырька $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

А.Аполонский

Задача 4. Частичный нагрев

Два одинаковых вертикальных цилиндра соединены сверху и снизу трубками пренебрежимо малого объема (рис.12). В верхней трубке имеется кран K, который исходно открыт. В цилиндры налита жидкость плотностью ρ . Оставшийся объем цилиндров высотой L заполнен газом при давлении p_0 и комнатной температуре T_0 . При неизменной температуре газа в левом цилиндре газ в правом нагрели до температуры T и закрыли кран. Нагреватель отключили. Когда воздух в правом цилиндре остыл до комнатной

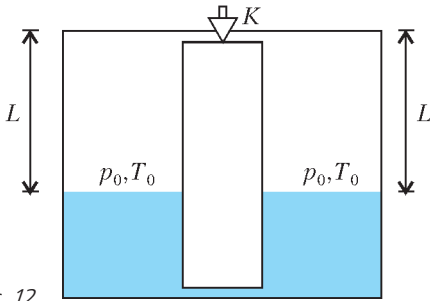


Рис. 12

температуры, разность уровней жидкости в цилиндрах стала $2h$. Найдите температуру T , если в левом цилиндре температура газа все время оставалась комнатной. Ускорение свободного падения равно g .

И. Воробьев

Задача 5. Нелинейная электрическая цепь

Электрическая цепь (рис.13,а) состоит из двух одинаковых диодов D_1 и D_2 , трех одинаковых нелинейных элементов H_1 , H_2 и H_3 и батарейки, поддерживающей постоянное напряжение $U_{AB} = 5,0$ В. Идеализированная вольт-амперная характеристика диода приведена на рисунке 13,б. Сила тока, протекающего через нелинейный элемент, может быть определена по формуле $I = kU^2$,

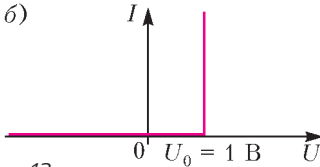
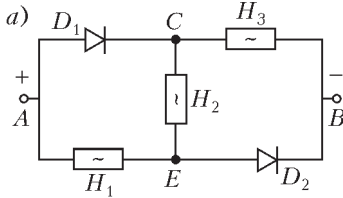


Рис. 13

где U – напряжение на элементе, $k = 0,1$ А/В² – постоянный коэффициент. Определите: 1) напряжения U_H на нелинейных элементах; 2) силы токов, протекающих через диоды.

А.Аполонский

11 класс

Задача 1. Три муфты

Три муфты A , B и C , массы которых равны $2m$, $3m$ и m соответственно, могут скользить без трения по двум горизонтальным направ-

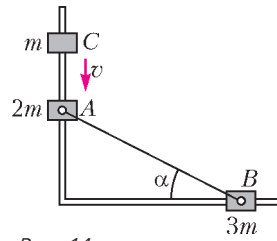


Рис. 14

ляющим, пересекающимся под прямым углом (рис.14). Муфты A и B с помощью шарниров соединены с легким жестким стержнем так, что угол между стержнем и направляющей, на которой надета муфта B , равен α . Между муфтой C , движущейся со скоростью v , и покоящейся муфтой A происходит неупругое столкновение. Определите скорости муфт сразу после соударения.

А.Аполонский

Задача 2. Отрыв цилиндра

Тонкая легкая нерастяжимая лента прикреплена к стене в точке O (рис.15). На ленте удерживают небольшой цилиндр мас-

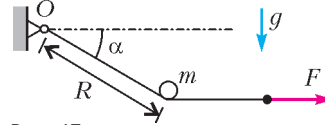


Рис. 15

сой m так, что наклонный участок ленты длиной R образует угол α с горизонталью. К свободному концу ленты приложили силу \vec{F} и цилиндр отпустили. Найдите его скорость в момент отрыва от ленты. Сила \vec{F} все время направлена горизонтально и постоянна по величине. Считайте, что трения нет, ускорение свободного падения равно g .

И. Воробьев

Задача 3. Дифференциальный термометр

Два одинаковых сосуда, объемом $V = 1,0$ л каждый, соединены трубкой длиной $L = 300$ см и поперечным сечением $S = 1$ см² с небольшим поршнем внутри, который может скользить в ней без трения (рис.16). Когда температуры газов в сосудах равны $T_0 = 300$ К, поршень располагается посередине трубки. При незначительных изменениях температур в сосудах поршень смещается вдоль шкалы, нанесенной рядом. Перерисовав в тетрадь, проградуируйте эту шка-

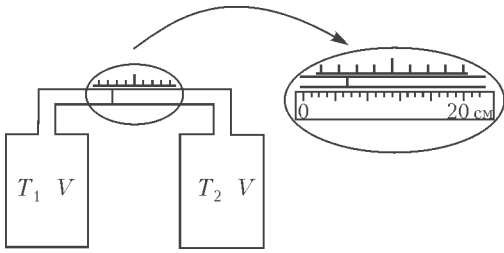


Рис. 16

лу (оцифруйте ее деления в градусах шкалы Кельвина), чтобы по ней можно было считать разность температур $\Delta T = T_1 - T_2$ (с учетом знака!). Будет ли эта шкала линейной? На выносном рисунке рядом со шкалой помещена линейка.

М.Замятнин

Задача 4. И так можно измерять

В точке O к стержню привязана непроводящая нить длиной R с зарядом q на конце (рис. 17). Известный эталонный заряд Q_2 и

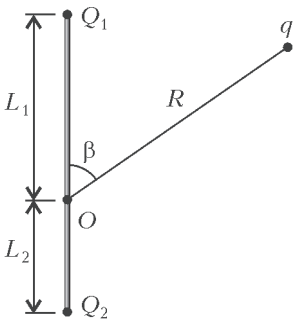


Рис. 17

измеряемый заряд Q_1 установлены на расстояниях L_2 и L_1 от точки O . Все заряды одного знака и могут считаться точечными.

1) Найдите величину заряда Q_1 , если в состоянии равновесия

нить отклонена на угол β от отрезка, соединяющего заряды Q_2 и Q_1 .

2) Какой величины заряды Q_1 можно измерить таким способом в случае, если $L_1 = 2L_2$ и $R = 3L_2$?

И.Воробьев

Задача 5. Составной конденсатор

Электрическая цепь (рис. 18,а) состоит из катушки индуктивностью L , трех пластин 1, 2, 3 площадью S каждая и ключа. Расстоя-

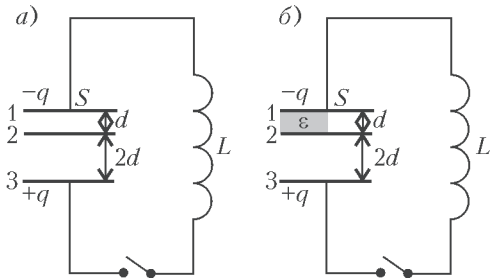


Рис. 18

ния между пластинами равны d и $2d$. Внешние пластины имеют заряды $+q$ и $-q$.

1) Определите максимальную силу тока через катушку после замыкания ключа.
2) Определите максимальную силу тока через катушку после замыкания ключа в случае, если половина пространства между пластинами 1 и 2 заполнена диэлектриком с проницаемостью ϵ (рис. 18,б).

Методкомиссия

Публикацию подготовил В.Слободянин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Шесть.

Заметим, что если определены первые три цифры, то последняя цифра будет определяться однозначно. Тройку можно представить или как сумму $1 + 1 + 1$, или $1 + 2 + 0$, или $3 + 0 + 0$. Во втором случае цифры могут быть переставлены четырьмя способами. Итого возможных вариантов шесть: 1117, 1027, 1207, 2108, 2018, 3009.

2. См. рис.1.

3. Общая сумма денег впятеро больше, чем сумма, выданная каждому младшему, значит, общее количество рублей делится на 5. Числа 5 и 10 кратны пяти, значит, сумма, набранная двухрублевыми монетами, тоже кратна 5. Тогда и количество двухрублевых монет делится на 5, и раз оно больше нуля, то оно не меньше пяти.

4. 148.

Всего шаров 600, а мест

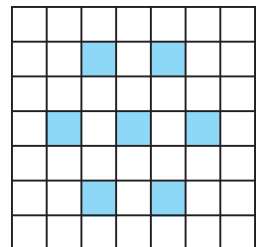


Рис. 1

в ящиках тоже 600. Значит, в каждом ящике ровно по 2 шара. Обозначим цвета буквами С, З, К. Если у нас есть ящик СЗ, то вокруг него обязательно стоят КК. Назовем участок красным, если на нем встречаются только ящики СЗ и КК. Заметим, что начинается и заканчивается красный участок ящиками КК, а внутри него ящики СЗ не стоят рядом, т.е. на красном участке ящиков КК хотя бы на один больше, чем СЗ. Аналогично на синем и зеленом участках (они определяются так же). Если у нас участок только одного цвета, то шаров этого цвета более чем в два раза больше остальных, а если двух цветов, например, К и З, то шаров синего цвета на красном участке не больше, чем зеленых, а на зеленом строго меньше. Значит, обязательно есть участки каждого цвета. Следовательно, участков не меньше трех, и на каждом участке одноцветных ящиков минимум на 1 больше, чем разноцветных. Значит, разноцветных ящиков не более $(300 - 3) : 2 = 148,5$, т.е. не больше 148.

Пример. Сначала, чередуясь, идут 51 ящик КК и 50 ящиков СЗ, потом один ящик СС, затем на зеленом участке есть 51 ящик ЗЗ и 50 ящиков СК, затем на синем участке 49 ящиков СС и 48 ящиков КЗ:

КК, СЗ, КК, СЗ, ..., КК, СС,
 ЗЗ, СК, ЗЗ, ..., СК, ЗЗ, СС, КЗ, ..., КЗ, СС.
 Красных ящиков $51 \cdot 2 + 50 + 48 = 200$, зеленых
 $50 + 51 \cdot 2 + 48 = 200$, синих $50 + 2 + 50 + 49 \cdot 2 =$
 $= 200$.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №1)

17. Петя ошибается. Контрпример – на рисунке 2.
 18. а), б) первый.

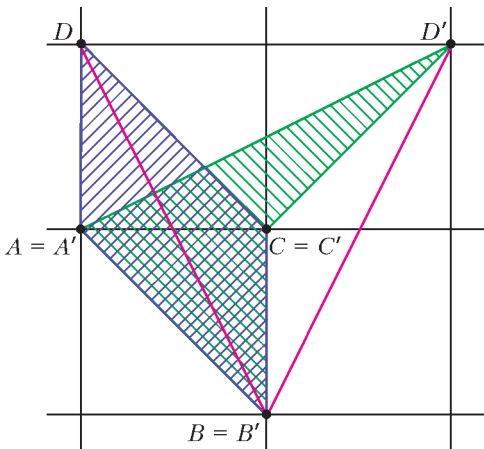


Рис. 2

а) Для победы первому игроку нужно взять 9 камней, затем 10, 11, 12, 13 и 14. Докажем, что это всегда возможно. Если противник взял столько же камней, сколько первый, то нужно взять на один больше, а если противник взял на один больше – то столько же, сколько противник. Всего первый игрок возьмет $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 69$ камней, а его противник – от 55 до 60. При этом $55 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13$ камней – когда противник всегда берет столько же, сколько первый, $60 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14$ – когда всегда на 1 камень больше. Итого они возьмут от 124 до 129 камней, для следующего хода второго останется от 2 до 7 камней, и второй игрок не может сделать ход.

б) Эта же стратегия приводит к победе первого игрока: ему нужно первым ходом взять 1 камень, затем 2, 3 и так до 11. Тогда он заберет 66 камней, а второй игрок – от 55 до 65, всего от 121 до 131 камня. Останется не больше 10 камней, и второй игрок не сможет сделать следующий ход.

19. а) Например, числа 159, 160, 161, 162.

б) Да, можно.

Пусть $N = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 201 + 1}{2}$, это целое число, так как числитель четный. Докажем, что последовательность $N + 1, N + 2, \dots, N + 100$ удовлетворяет условию.

Для этого докажем, что для всех целых k от 1 до 100 число $N + k$ делится на $2k + 1$. Рассмотрим произвольное k из этого диапазона. Число $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 201$ делится на $2(k + 1)$ и в частном дает нечетное число, назовем его p . Тогда

$$N + k = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 201 + 2k + 1}{2} = (2k + 1) \frac{p + 1}{2},$$

откуда следует, что $N + k$ делится на $2k + 1$.
Замечание. Эта задача – частный случай задачи М2501 «Задачника «Кванта» («Квант» №2 за 2018 г.).

20. Покажем, что если разрешены прыжки на a и $a - 1$ клетку, то можно пройти от клетки с номером x до клетки с номером $x + 2a - 1$, попутно посетив все клетки между ними и не посетив никакие другие.

Для этого прыгаем на a вправо, на $a - 1$ влево, на a вправо, на $a - 1$ влево и так далее. Всего $2a - 1$ пар прыжков, за каждую пару сдвигаемся на 1 вправо:

$$x, x + a, x + 1, x + a + 1, x + 2, x + a + 2, \\ x + 3, \dots, x + a - 2, x + 2a - 2, x + a - 1, \\ x + 2a - 1.$$

При $a = 9$ получается, что мы проходим от x до $x + 17$, а при $a = 10$ – до $x + 19$. Таким образом,

если полосу длины n можно пройти такими «блоками» из 17 и 19 клеток, то n пропрыгиваемо. При этом можно считать, что мы начинаем обход с воображаемой клетки номер 0: эту клетку можно выбросить, так как она в пути первая. Итак, мы показали, как пройти полосу длины $17a + 19b$, где a и b целые неотрицательные числа. Будем называть числа такого вида *хорошими*.

Покажем, что все натуральные числа, начиная с некоторого числа M , хорошие.

Возьмем $a = 0$, $b = 8 \cdot 16$ и соответствующее им хорошее число $M = 17 \cdot 0 + 19 \cdot 8 \cdot 16$. Увеличив a на 9 и уменьшив b на 8, получим хорошее число, которое будет на 1 больше (так как $17 \cdot 9 - 19 \cdot 8 = 153 - 152 = 1$).

Сделав такое действие 16 раз, получим 17 подряд идущих хороших чисел (заметим, что b изначально выбрано так, чтобы при таких действиях оно не стало отрицательным). Прибавив к ним всем по 17, получим, что 17 идущих за ними чисел тоже хорошие. И так далее, последовательно прибавляя к таким группам чисел по 17, получим, что все последующие числа тоже хорошие.

Задача решена.

Во второй части решения мы доказали частный случай такого факта: *для любых двух взаимно простых чисел p и q все натуральные числа, начиная с некоторого M , можно представить в виде суммы слагаемых, каждое из которых равно p или q* . В задаче M194 «Задачника «Кванта» требовалось найти наименьшее такое число M . Ее решение можно прочитать в №11 за 1973 год, а также по ссылке http://kvant.ras.ru/1973/11/resheniya_zadachnika_kvanta_ma.htm

В «Кванте» уже была задача про такую конструкцию с кузнечиком: в задаче M2460 (в №4 за 2017 год) требовалось доказать, что существует непропрыгиваемое n , большее 50. Обсуждению этой и других похожих задач посвящена статья П.Кожевникова «Длинные пути в графах» (в №2 за 2018 год).

Какие n пропрыгиваемы, а какие – нет, нам неизвестно. В частности, нам неизвестно наименьшее M , начиная с которого все числа пропрыгиваемы. Предлагаем читателям подумать над этим вопросом; о своих продвижениях можете сообщать в редакцию. Интересен не столько сам ответ (который можно получить с помощью компьютерного перебора), сколько подходы к его нахождению.

Можно не ограничиваться решением задачи для длин прыжков 8, 9, 10, а рассмотреть задачу в более общей постановке: *Кузнечик умеет прыгать по полоске из n клеток на a_1, a_2, \dots, a_k*

клеток в любую сторону. Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти всю полосу, побывав на каждой клетке ровно один раз. Найдите все пропрыгиваемые n .

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Если узел замощения попал на сторону одного из многоугольников, то вместо равенства $n\alpha_k = 360^\circ$ получим для этой вершины $m\alpha_k = 180^\circ$, где m – количество многоугольников, примыкающих в этой точке к стороне. Положив $n = 2m$, мы вернемся к исходному уравнению $n\alpha_k = 360^\circ$ и все равно получим, что k равно 3, 4 или 6. Новые замощения, правда, при этом появятся: в замощениях на рисунках 1 и 4 можно сдвигать ряды квадратиков или треугольников друг относительно друга (как в кирпичной кладке).

ДОКАЗАТЬ ДЕЛИМОСТЬ ПОМОЖЕТ КОМБИНАТОРИКА

10. Докажем, что (1) $C_{2m}^{2k+1} : 2$ и (2) $C_{2m}^{2k} \equiv C_m^k$ ($m, k \in \mathbb{N}$). Подмножество $A \subseteq \{\pm 1, \dots, \pm m\}$ назовем симметричным, если $A = -A$. Поскольку несимметричных подмножеств четное число, то C_{2m}^l сравним по модулю 2 с числом симметричных l -элементных подмножеств. При нечетном l таких нет, поэтому верно (1), а при четном $l = 2k$ их C_m^k , поэтому верно (2).

Теперь докажем теорему 4. Если $n = 2^s$ и $0 < d = 2^t(2k+1) < n$, то $t < s$ и $C_n^d \equiv C_{2^{s-t}}^{2k+1} \stackrel{(1)}{\equiv} \stackrel{(2)}{\equiv} 0 \pmod{2}$. Если же $n = 2^s(2m+1)$, то $C_n^{2^s} \equiv \stackrel{(2)}{\equiv} C_{2m+1}^1 = 2m+1 \pmod{2}$.

11. Алгоритм основан на утверждениях (1) и (2) из решения предыдущей задачи и сравнениях $C_{2m+1}^{2k} \equiv C_{2m+1}^{2k+1} \equiv C_n^k \pmod{2}$, которые доказываются аналогично рассмотрением подмножеств множества $\{0, \pm 1, \dots, \pm n\}$.

12. $C_{100}^n = \frac{100!}{n!(100-n)!} = \frac{100!}{(n+1)!(100-n)!} \cdot \frac{n+1}{101} = (n+1) \frac{C_{101}^{n+1}}{101} : n+1$, так как 101 простое и делит C_{101}^{n+1} по теореме 5.

13. Пусть $1 < k < l < n$. Сосчитаем число пар (A, B) подмножеств n -элементного множества, для которых $|A| = k$, $|B| = l$ и $A \subseteq B$, двумя способами:

1) сначала выберем B , а затем в нем выберем A – это $C_n^l C_l^k$ вариантов;

2) сначала выберем A , а затем дополним его до B – это $C_n^k C_{n-k}^{l-k}$ вариантов.

Значит, $C_n^l C_l^k = C_n^k C_{n-k}^{l-k}$, откуда $C_n^l C_l^k : C_n^k$. Если $(C_n^l, C_n^k) = 1$, то $C_l^k : C_n^k$. Но, очевидно, $C_l^k < C_n^k$. Противоречие.

$$\begin{aligned} 14. \text{ а) } C_{2n}^n &= \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \frac{n+1}{n} C_{2n}^{n-1} \Rightarrow n C_{2n}^n = (n+1) C_{2n}^{n-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_{2n}^{n-1} : n, C_{2n}^n : n+1, \end{aligned}$$

так как $(n, n+1) = 1$.

б) $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$ – это знаменитые числа Каталана (см., например, статью М. Гарднера «Числа Каталана» в «Кванте» № 7 за 1978 г.).

15. $59 = 3 \cdot 17 + 8$, $17 = 2 \cdot 8 + 1 \Rightarrow 1 = 17 - 2 \cdot 8 = 17 - 2(59 - 3 \cdot 17) = 7 \cdot 17 - 2 \cdot 59$. Отсюда $17x \equiv 1 \equiv 17 \cdot 7 \pmod{59} \Leftrightarrow x \equiv 7 \pmod{59}$. Наименьшее положительное решение: $x_1 = 7$, наименьшее по модулю отрицательное решение: $x_2 = -52$. Значит, кузнечику надо сделать 7 прыжков на 17 в направлении от 0 к 1 либо 52 прыжка в противоположном направлении.

16. Признайтесь: вы поначалу отметили $\frac{1}{2}$ посередине дуги между 0 и 1? Конечно, $\frac{1}{2}$ в \mathbb{Z}_5 – это 3, ведь $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$. А вот дробь $\frac{7}{5}$ на рисунке 3,б отметить нельзя: уравнение $5x = 7$ не имеет решений ни в каком расширении K поля \mathbb{Z}_5 , поскольку $5x = 0$ в K , а $7 = 2 \neq 0$ в K .

17. С каждым подмножеством $A \subset \mathbb{Z}_p$ связаны p его циклических сдвигов: $A + k$, $k \in \mathbb{Z}_p$. Если $A \neq \emptyset$, \mathbb{Z}_p , то они все различны. В самом деле, пусть $A = A + k$, $k \neq 0$ и $a \in A$. По теореме 6, $kl = 1$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}_p$. Тогда $A \ni a, a+k, a+2k, \dots, a+lk = a+1$, откуда $A = \mathbb{Z}_p$.

18. а) Индукция по a .

б) $a^p = (\underbrace{1+\dots+1}_a)^p = \underbrace{1^p+\dots+1^p}_a + p(\dots)$, так как полиномиальные коэффициенты $\frac{p!}{n_1! \dots n_a!}$ кратны p , если $n_1, \dots, n_a < p$, аналогично теореме 5.

19. Предположим, что некоторая раскраска перешла в себя при повороте на d делений, $0 < d < p$. Значит, ее цвета повторяются с шагом d , а тогда по теореме 6 – и с шагом 1. Это означает, что раскраска одноцветна. Значит, при всех p поворотах неоднородной раскраски мы получим из нее p различных раскрасок.

20. При $p = 4$ все раскраски неподвижного квадрата делятся на 3 группы: одноцветные (a штук), двуцветные чередующиеся ($a^2 - a$ штук) и остальные ($a^4 - a^2$ штук). Раскраски второй группы разбиваются на пары эквивалентных, а раскраски третьей группы – на четверки эквивалентных. Отсюда получаем ответ:

$$a + \frac{a^2 - a}{2} + \frac{a^4 - a^2}{4} = \frac{1}{4}(a^4 + a^2 + 2a).$$

Для шестиугольника рассмотрим раскраски, переходящие в себя при повороте на (самое меньшее) 1, 2 и 3 деления. Их соответственно a , $a^2 - a$ и $a^3 - a$ штук. Всех остальных $a^6 - (a + a^2 - a + a^3 - a)$. Поэтому ответ:

$$\begin{aligned} a + \frac{a^2 - a}{2} + \frac{a^3 - a}{3} + \frac{a^6 - a^3 - a^2 + a}{6} = \\ = \frac{1}{6}(a^6 + a^3 + 2a^2 + 2a). \end{aligned}$$

Используя формулу обращения Мёбиуса или лемму Бернсайда, можно показать, что для n -угольника ответ такой: $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d$, где φ – функция Эйлера. Это известная «задача о числе ожерелий».

21. Ломаная слева на рисунке 5 статьи эквивалентна только самой себе. Таких ломаных $p-1$: они задаются длиной первого шага, остальные шаги имеют ту же длину. У любой из остальных $(p-1)!(p-1)$ ломаных ровно p эквивалентных, что доказывается, как в задаче 19. Отсюда следует, что $(p-1)!(p-1) : p$, т.е. $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

22. а) Все ненулевые вычеты 1, ..., $p-1$ по модулю p разбиваются на пары обратных, кроме двух вычетов 1 и $p-1$, которые обратны самим себе. Важно, что других таких особых вычетов нет: $a = a^{-1} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow (a-1)(a+1) = 0 \Leftrightarrow a \pm 1$ для всех $a \in \mathbb{Z}_p$. Мы воспользовались тем, что произведение ненулевых элементов в \mathbb{Z}_p отлично от нуля (это общее свойство отсутствия делителей нуля в поле).

б) Рассмотрим оба многочлена над \mathbb{Z}_p (т.е. считаем коэффициенты вычетами из \mathbb{Z}_p). Согласно малой теореме Ферма, у этих многочленов одни и те же корни – все элементы \mathbb{Z}_p . Так как многочлены имеют одинаковую степень p и одинаковые старшие коэффициенты 1, то они равны. Сократим на x :

$$x^{p-1} - 1 = (x-1)\dots(x-p+1).$$

Подставив сюда $x = 0$, получаем требуемое.

23. Если $p = ab$, где $1 < a < b < p$, то

$$(p-1)! = 1 \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot b \cdot \dots \cdot (p-1) : ab = p.$$

Остался случай $p = q^2$, где q – простое. Если $2q < q^2$, т.е. $p > 4$, то

$$(q^2 - 1)! = 1 \cdot \dots \cdot q \cdot \dots \cdot 2q \cdot \dots \cdot (q^2 - 1) \div q^2 = p.$$

А при $p = 4$ имеем $(p - 1)! = 6 \not\equiv -1 \pmod{4}$.

**РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLIV
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

9 класс

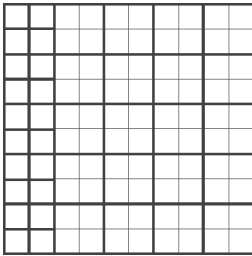


Рис. 3

1. Один из многих возможных примеров приведен на рисунке 3.

2. Да, обязательно. Пусть a, b, c, d и e – числа на доске в убывающем порядке, т.е. $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Тогда по условию $a + b + c$ и $b + c + d$

делятся на e . Следовательно, $d - a = (b + c + d) - (a + b + c)$ также делится на e . Поскольку $0 \leq d - a < d \leq e$, это возможно лишь при $d - a = 0$. Значит, $a = b = c = d$ (так как $a \leq b \leq c \leq d$).

3. 90° .

На продолжении отрезка AB за точку B отметим точку F так, что $AB = BF$ (рис.4). Тогда $BF = CD$ и $BF \parallel CD$, поэтому четырехугольник

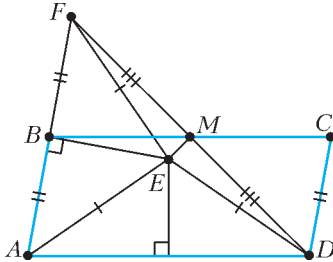


Рис. 4

$BDCF$ – параллелограмм. Точка M – середина диагонали BC этого параллелограмма, значит, M – середина его диагонали DF .

Прямая BE – серединный перпендикуляр к отрезку AF , откуда $AE = FE$. Из условия теперь получаем, что $DE = AE = FE$. Значит, точка E лежит и на серединном перпендикуляре к DF . Отсюда $\angle EMD = 90^\circ$.

4. $N = 5501$.

Обозначим через A_1, A_2, \dots, A_N множества учеников, не получивших конфет, соответственно, 1-го, 2-го, ..., N -го сортов. Согласно условию, все эти множества различны; кроме того, каж-

дый ученик содержится не более чем в десяти из них. Отсюда следует, что суммарное количество элементов в наших множествах не превосходит $1000 \cdot 10 = 10000$.

Пусть среди наших множеств ровно k одноэлементных. Тогда количество множеств из более чем одного ученика не превосходит $\frac{10000 - k}{2}$, поэтому общее число всех непустых множеств не превосходит

$$\frac{10000 - k}{2} + k = \frac{10000 + k}{2} \leq \frac{11000}{2} = 5500.$$

С учетом того, что одно из множеств может быть пустым, получаем $N \leq 5501$.

Осталось показать, как описанная ситуация могла возникнуть при $N = 5501$. Сделаем множество A_{5501} пустым; различные множества $A_{4501}, \dots, A_{5500}$ будут содержать по одному ученику. Осталось выбрать различные двухэлементные множества A_1, \dots, A_{4500} так, чтобы каждый из учеников был ровно в 9 из них. Для этого, например, можно разбить учеников на 100 групп по 10 человек и взять все пары детей, находящихся в одной группе (их получится как раз $100 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 4500$).

5. Поскольку при любой перестановке переменных левая часть неравенства либо не меняется, либо меняет знак, достаточно проверить неравенство для любой перестановки чисел x, y и z , для которой левая часть неотрицательна. Поэтому можно считать, что $x \geq y \geq z$.

По неравенству о средних для двух чисел имеем

$$(x - y)(y - z) \leq \left(\frac{(x - y) + (y - z)}{2} \right)^2 = \left(\frac{x - z}{2} \right)^2.$$

Следовательно,

$$(x - y)(y - z)(x - z) \leq \frac{(x - z)^3}{4},$$

и нам достаточно доказать, что $x - z \leq \sqrt{2}$ или, что то же самое, $(x - z)^2 \leq 2$. Последнее уже просто; действительно,

$$(x - z)^2 = 2x^2 + 2z^2 - (x + z)^2 \leq 2x^2 + 2z^2 = 2 - 2y^2 \leq 2.$$

6. $\underbrace{3999\dots998}_{223 \text{ девятки}}$.

Поскольку $2018 = 224 \cdot 9 + 2$, наименьшее число с суммой цифр 2018 будет равняться $\underbrace{2999\dots99}_{224 \text{ девятки}}$.

В этом числе 225 знаков. Рассмотрим 225-значные числа, у которых старшая цифра будет тройкой, а остальные цифры – девятками, за исключением ровно одной восьмерки. Таких чисел в точности 224 (именно столько положений для восьмерки) и у каждого из них сумма цифр

2018. Самым большим среди этих чисел будет число $N = 3 \overbrace{999 \dots 99}^{223 \text{ девятки}} 8$. Поскольку все остальные 225-значные числа с суммой цифр 2018 будут иметь старшую цифру не меньшую четырех, они будут больше указанных чисел и, значит, N будет 225-м по счету числом с суммой цифр 2018.

7. Нет.

Поскольку красные фишки не могут меняться местами с зелеными, их взаимный порядок всегда будет оставаться таким же, как исходный. Иначе говоря, если в любой момент убрать синие фишки, то останутся 30 красных фишек, стоящих подряд, и 20 зеленых, также стоящих подряд. Если требуемого удалось добиться, это означает, что мы удалили хотя бы по одной синей фишке с каждого из 29 интервалов между соседними красными фишками и с каждого из 19 интервалов между соседними зелеными фишками; но тогда синих фишек было бы не меньше, чем $29 + 19 = 48 > 40$, что не так. Значит, требуемое невозможно.

8. Пусть n является хорошим числом. Тогда $n > 1$, и для некоторых целых неотрицательных чисел k_1, k_2, \dots, k_q справедливо равенство

$$p + q = n^{k_1} + n^{k_2} + \dots + n^{k_q}.$$

Рассмотрим остаток от деления правой части на $n - 1$. Поскольку любая степень числа n дает остаток 1 при делении на $n - 1$, правая часть сравнима с q по модулю $n - 1$. Тогда с q сравнима и левая часть; следовательно, p делится на натуральное число $n - 1$. Но у простого числа p только два натуральных делителя: 1 и p . Значит, $n - 1$ может равняться 1 и p . Стало быть, $n = 2$ или $n = p + 1$, и поэтому хороших чисел не больше двух.

9. Обозначим через Z точку пересечения лучей XA и YB (рис.5). Прямые ZA и ZB касаются окружности ω , поэтому $\angle OAZ = \angle OBZ = 90^\circ$.

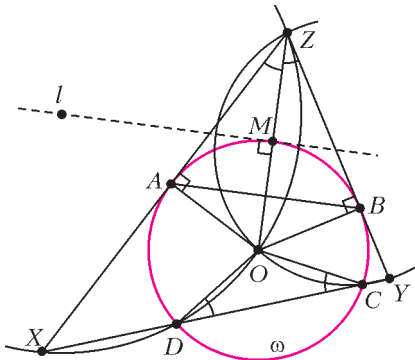


Рис. 5

Тогда $\angle AZB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Поскольку окружность ω касается сторон угла XZY , ее центр O лежит на биссектрисе этого угла, т.е. $\angle XZO = 30^\circ = \angle OZY$.

Из равнобедренного треугольника COD получаем $\angle OCD = \angle ODC = 30^\circ$. Тогда $\angle OZX + \angle ODX = 30^\circ + 180^\circ - \angle ODC = 180^\circ$, поэтому четырехугольник $XDOZ$ вписан. Аналогично, вписан и четырехугольник $YCOZ$. Таким образом, OZ — общая хорда окружностей, описанных около треугольников DOX и COY , поэтому l — серединный перпендикуляр к отрезку OZ .

Пусть M — середина OZ . Прямая l проходит через M и перпендикулярна OM ; поэтому для завершения решения достаточно показать, что точка M лежит на ω . В прямоугольном треугольнике AZO имеем $\angle AZO = 30^\circ$, поэтому $AO = \frac{1}{2}OZ = OM$, откуда и следует требуемое.

10 класс

3. Требуемое неравенство равносильно неравенству $x^9 \geq 8y^3$. По условию, $8(x^5 - 2x) \geq 8y^3$; значит, достаточно доказать неравенство $x^9 \geq 8x^5 - 16x$. Переноса в последнем неравенстве все члены в левую часть, получаем неравенство $x(x^4 - 4)^2 \geq 0$,

которое верно для положительного x . Значит, и требуемое неравенство также верно.

4. Пусть G — центр окружности γ , описанной около треугольника BXP (рис.6). Тогда

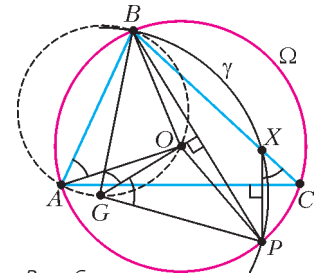


Рис. 6

$\angle BGP = \angle BXP = 2\angle CXP$ (так как угол CXP острый). Поскольку $GB = GP$ и $OB = OP$, треугольники GOB и GOP равны по трем сторонам, откуда $\angle BGO = \angle OGP = \frac{1}{2}\angle BGP = \angle CXP$. Наконец, из равнобедренного треугольника AOB получаем

$$\angle BAO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \angle ACB = \angle CXP.$$

Итак, $\angle BGO = \angle CXP = \angle BAO$, а это и означает, что точки A, G, B и O лежат на одной окружности.

5. Два способа.

Рассмотрим произвольную расстановку чисел от 1 до n , удовлетворяющую требованиям. Предположим, что два четных числа x и y стоят рядом, а следующее за ними число — z . Так как $x + z$

делится на y , число z также четно. Продолжая таким же образом движение по кругу, получим, что все числа в расстановке четны, что невозможно. Итак, никакие два четных числа не стоят рядом; значит, некоторые два нечетных числа стоят рядом, а остальные четные и нечетные чередуются.

Заметим, что оба соседа числа n не могут быть четными; действительно, в противном случае их сумма делилась бы на $2n$, т.е. была бы не меньше $2n$. Значит, у любого нечетного числа, меньшего n , либо оба соседа четны, либо одним из соседей является число n .

Предположим, что числа n и $n - 2$ — соседи, а другой сосед числа $n - 2$ — число t . Число $t + n = (n - 2) + (t + 2)$ должно делиться на $n - 2$, что возможно лишь при $t = n - 4$. Но тогда три нечетных числа $n, n - 2, n - 4$ стоят подряд, что, как мы доказали, невозможно.

Итак, оба соседа нечетного числа $n - 2$ четны, а потому их сумма делится на $2(n - 2)$, т.е. эта сумма не меньше $2(n - 2)$; это возможно лишь если эти соседи $n - 1$ и $n - 3$. В частности, числа $n - 1$ и $n - 2$ — соседи. Если пара $n - 1, n - 2$ продолжается далее числами, идущими подряд по убыванию вплоть до числа 1, мы приходим к круговой расстановке $n - 1, n - 2, n - 3, n - 4, \dots, 3, 2, 1, n$, которая, очевидно, удовлетворяет условию.

Предположим теперь, что пара $n - 1, n - 2$ продолжается далее числами, идущими подряд по убыванию, вплоть до числа $d > 1$, а после него следует число $x \neq d - 1$. Итак, у нас имеются подряд идущие по окружности числа $n - 1, n - 2, \dots, d + 1, d, x, y, \dots$. Так как $x + (d + 1) = (x + 1) + d$ делится на d , то $x + 1$ делится на d , в частности, $x \geq d - 1$. Но x отлчно от чисел $d - 1, d, \dots, n - 2, n - 1$; значит, единственный оставшийся вариант — это $x = n$.

Пусть $n = 2k + 1$. Мы получили, что число $n + 1 = 2k + 2$ делится на d ; так как $d < n$, имеем $d \leq k + 1$. С другой стороны, $y \leq d - 1 \leq k$ (так как все числа, большие $d - 1$, уже использованы). Отсюда $d + y \leq (k + 1) + k = n$. Так как $d + y$ должно делиться на $x = n$, приходим к единственной возможности: $d = k + 1, x = n, y = k$. Итак, у нас имеются подряд идущие по окружности числа $2k, 2k - 1, 2k - 2, \dots, k + 2, k + 1, 2k + 1, k, a, \dots$

Так как $a \leq k - 1$ (все числа, большие $k - 1$, уже использованы) и число $(2k + 1) + a = 2k + (a + 1)$ делится на k , однозначно находим $a = k - 1$. Аналогично, если последовательность продолжается далее числами $k - 1, k - 2, \dots, b + 1, b$, идущими подряд по убыванию, а далее следует

число y , однозначно находим $y = b - 1$ (поскольку $b + 1 + y$ делится на b и $y \leq b - 1$).

Итак, мы приходим к круговой расстановке $2k, 2k - 1, 2k - 2, \dots, k + 2, k + 1, 2k + 1, k, k - 1, k - 2, \dots, 1$, которая, очевидно, удовлетворяет условию (и отлична от найденной ранее).

6. Пусть $n = kd$. Тогда на доске присутствует дробь

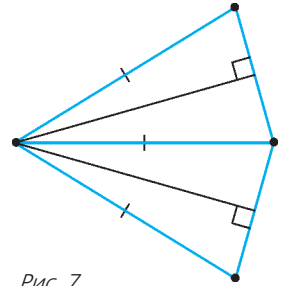
$$\frac{n - k}{k} = \frac{kd - k}{k} = d - 1,$$

что и требовалось.

7. Неверно.

Приведем один из возможных примеров. Из двух равных равнобедренных (но не равносторонних) треугольников составим *дельтоид*, приложив их друг к другу равными сторонами, как показано на рисунке 7. Каждый из этих двух треугольников разобьем высотой на два равных треугольника. В результате дельтоид окажется составленным из четырех равных прямоугольных треугольников.

Рис. 7



8. 100000.

Разобьем доску на 100^2 квадратов 10×10 . Покажем, что в каждом квадрате может стоять не более 10 гепардов, не бьющих друг друга, — отсюда будет следовать, что общее число гепардов не может превосходить $100^2 \cdot 10 = 100000$.

Рассмотрим произвольный квадрат Q размера 10×10 и произвольного гепарда g в нем. Гепард g бьет все клетки квадрата, кроме клеток, лежащих с ним в одной строке или в одном столбце. Если один из остальных гепардов g' в квадрате Q стоит в одной строке с g , а еще один, g'' , — в одном столбце с g , то g' и g'' стоят в разных строках и столбцах и, следовательно, бьют друг друга; это невозможно. В противном случае, без ограничения общности, все гепарды в квадрате Q стоят в одной строке с g , т.е. их не больше 10. Таким образом, мы доказали, что общее число гепардов не может превосходить 100000; осталось привести пример, когда эта оценка достигается. Пронумеруем столбцы доски подряд числами $1, 2, \dots, 1000$. Расставим гепардов на все клетки столбцов, номера которых делятся на 10. Этих гепардов будет $1000 \cdot 100 = 100000$, и они не будут бить друг друга.

11 класс

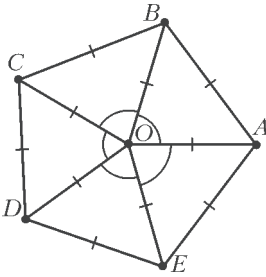


Рис. 8

1. 9 отрезков.
Сначала докажем, что все 10 отрезков не могут иметь длину 1. Предположим противное. Пусть $ABCDE$ – пятиугольник, O – точка внутри него и все 10 проведенных отрезков имеют длину 1 (рис.8). Тогда треугольники OAB , OBC , OCD , ODE и OEA – правильные, поэтому

$$\begin{aligned} \angle AOB = \angle BOC = \\ = \angle COD = \angle DOE = \angle AOE = 60^\circ . \end{aligned}$$

Сумма же этих углов должна быть равна 360° , однако $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$ – противоречие.

Осталось привести пример, когда 9 отрезков имеют длину 1 (рис.9). Отметим на плоскости точки A и O , на расстоянии 1, выберем последовательно точки B , C , D и E так, чтобы треугольники AOB , BOC , COD и DOE были равносторонними.

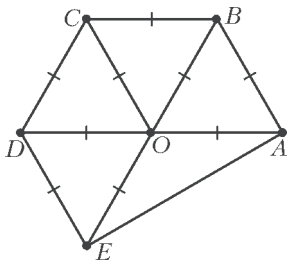


Рис. 9

Тогда точка O лежит внутри пятиугольника $ABCDE$, и из 10 проведенных отрезков все, кроме AE , имеют длину 1.

2. Да, обязательно.

Покажем, что требуемому условию удовлетворяют *любые* два столбца таблицы. Выкинем из таблицы все столбцы, кроме двух рассматриваемых. Общее число нулей в этих столбцах больше общего числа единиц; это значит, что нулей в них не меньше 1002. Если в полученной таблице есть k строк с двумя нулями, то имеются еще хотя бы $1002 - 2k$ строк с одним нулем и, следовательно, не более $1001 - k - (1002 - 2k) = k - 1$ столбцов с двумя единицами. Осталось заметить, что $k - 1 < k$.

3. Так как $\angle ABC = 135^\circ$, то $\angle AOC = 90^\circ$. Так как OM – медиана в прямоугольном треугольнике AOC , имеем $OM = AM = MC$. На продолжении отрезка OM за точку M отметим точку E так, что $OM = ME$ (рис.10). Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный, $BM \cdot MD = AM \cdot MC = OM \cdot ME$. Следовательно, точка E лежит на окружности Γ . Точка O лежит на

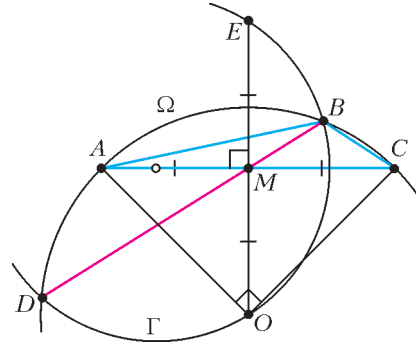


Рис. 10

серединном перпендикуляре к отрезку AC , поэтому $AC \perp OM$. Значит, прямая AC является серединным перпендикуляром к отрезку OE . Поскольку отрезок OE является хордой окружности Γ , ее центр лежит на прямой AC .

4. Нет, не могут.

Рассмотрим попарные разности выписанных чисел. За одну операцию набор разностей $x - y$, $y - z$, $z - x$ переходит в набор $(y - x)(x + y + z)$, $(z - y)(x + y + z)$, $(x - z)(x + y + z)$. Так как в исходный момент эти разности равнялись $1 - 2\sqrt{2}$, -1 и $2\sqrt{2}$, в любой момент времени попарные разности будут иметь вид $A(1 - 2\sqrt{2})$, $-A$ и $2A\sqrt{2}$ при некотором A . Эти три разности могут быть одновременно рациональными лишь при $A = 0$. Осталось показать, что этого не произойдет.

Предположим, что после n -й минуты число A впервые обнулилось. Из наших формул вытекает, что после $(n - 1)$ -й минуты впервые обнулилась сумма выписанных чисел. Но изначально сумма выписанных чисел ненулевая, а после первой же минуты все они становятся неотрицательными, поскольку

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0,$$

причем равенство достигается лишь при $a = b = 0$. Значит, после $(n - 1)$ -й минуты все числа на доске оказались нулевыми. Но это противоречит тому, что после n -й минуты A обнулилось впервые: ведь в этом случае после $(n - 1)$ -й минуты все попарные разности чисел уже должны быть нулевыми.

5. 4000 выстрелов.

Будем называть лодочку *горизонтальной* или *вертикальной* в зависимости от того, горизонтальны или вертикальны ее параллельные стороны.

Покажем сначала, что 4000 выстрелов хватит. Разобьем квадрат 100×100 на 400 квадратов размером 5×5 , и в каждом квадрате произведе-

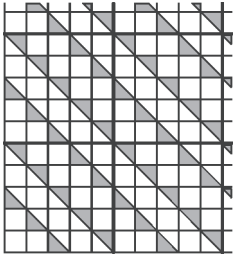


Рис. 11

дем 10 выстрелов, как показано на рисунке 11. Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце между соседними выстрелами нельзя вставить лодочку; значит, один из выстрелов обязательно потопит лодочку.

Осталось показать, что нельзя гарантированно потопить лодочку менее чем за 4000 выстрелов. На сей раз разобьем доску на 2000 горизонтальных прямоугольников 1×5 и покажем, что в каждый такой прямоугольник надо сделать хотя бы два выстрела. Действительно, в левые три клетки прямоугольника нужно сделать хотя бы один выстрел, иначе в них могла расположиться непотопленная лодочка; то же верно для его правых трех клеток. Значит, в этот прямоугольник могло быть сделано не более одного выстрела, только если единственный выстрел попал в центральную клетку прямоугольника. Без ограничения общности, этот выстрел был произведен в левый нижний треугольничек этой клетки; но тогда лодочка, расположенная как на рисунке 12, не будет потоплена.



Рис. 12

7. Верно.

Подставим в данное равенство $-y$ вместо y . Получим

$$f(x) + f(-y) = 2f\left(\frac{x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Итак, $f(x) + f(y) = f(x) + f(-y)$, откуда для всех действительных y получим $f(y) = f(-y)$. Это и означает, что функция $f(x)$ четная.

10. Пусть O_1 и O_2 — центры сфер ω_1 и ω_2 соответственно. Отметим (фиксированные) середины S и K отрезков O_1O_2 и AB соответственно, а также (переменные) середины L , M и N отрезков BY , XU и AX соответственно (рис.13). Так как отрезки AX и BY параллельны, отрезок KM также им параллелен. Как известно, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, поэтому отрезки KM и LN имеют общую середину T .

Проведем плоскость α через T перпендикулярно AX ; так как $KM \parallel AX$, все точки этой плоскости равноудалены от точек K и M . Поскольку T — середина LN , точки L и N равноудалены от α и лежат по разные стороны от нее (либо обе

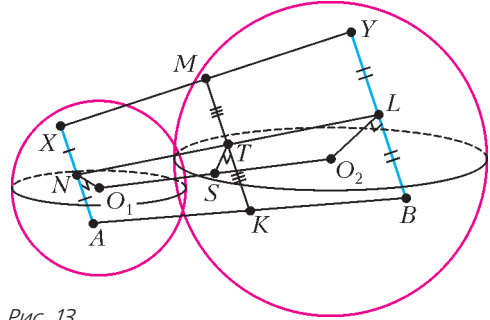


Рис. 13

лежат в α). Так как отрезки O_1N и O_2L перпендикулярны AX , они параллельны α ; тогда точки O_1 и O_2 также равноудалены от α , поэтому середина S отрезка O_1O_2 лежит в α . Итак, $SK = SM$.

Таким образом, если точки S и K не совпадают, середина M отрезка XU лежит на сфере с центром в точке S и радиусом, равным длине отрезка SK . Если же $S = K$, то $S = M$, и середины всех отрезков XU совпадают. В этом случае условием удовлетворяет любая сфера, проходящая через точку S .

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП III ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

7 класс

1. Приложив к рисунку линейку, можно определить, что 14 м/с соответствует 87 уд/мин . Следовательно, $90 \text{ уд/мин} = 52 \text{ км/ч}$; показания спидометра $55 \text{ уд/мин} = 32 \text{ км/ч}$; $1 \text{ уд} = 9,7 \text{ м}$.

2. $\frac{v_d}{v_p} = \frac{s_1 - s_2}{2s_2 - s_1} = 5$; $s = \frac{s_1}{2} \left(\frac{v_d}{v_p} + 1 \right) = 3300 \text{ м}$.

3. Так как длины частей стержня одинаковы, а линейные плотности отличаются в 3 раза, во столько же раз отличаются и их массы. Следовательно, линия разреза отсекает две трети тяжелой половины, линейная плотность однородной короткой части равна

$$\lambda_1 = \lambda_1 = 60 \text{ г/дм},$$

а составной длинной части —

$$\lambda_{II} = \frac{\lambda_1/6 + \lambda_2/2}{2/3} = 30 \text{ г/дм}.$$

4. Проще всего не решать задачу аналитически, а продлить (экстраполировать) данный график до объема 0 дм^3 и до плотности $2,2 \text{ г/см}^3$. В первом случае мы получим плотность жидкости: $\rho_0 = 0,8 \text{ г/см}^3$, а во втором — объем сосуда: $V_0 = 14 \text{ дм}^3$.

8 класс

1. Из условия не очевидно, на каком участке (втором или третьем) скорость больше. По определению, средняя скорость на всем пути $v_{\text{cp}} = s/t$, где s – все пройденное расстояние, а t – все время движения. Тогда скорость на втором участке $\frac{3}{2}v_{\text{cp}} = \frac{s_2}{t/4}$, пройденное на этом участке расстояние $s_2 = 3s/8$, а длина оставшегося третьего участка $7s/24$. Время движения на первом и третьем участках $\frac{3}{4}t = \frac{s}{3v} + \frac{7s}{48v}$, откуда

$$v = \frac{23s}{36t}, \text{ или } v_{\text{cp}} = \frac{36}{23}v = 72 \text{ км/ч.}$$

Но

$$\frac{3}{2}v_{\text{cp}} = 108 \text{ км/ч} > 2v = 92 \text{ км/ч.}$$

Окончательно, максимальная скорость

$$v_{\text{max}} = \frac{3}{2}v_{\text{cp}} = 108 \text{ км/ч.}$$

2. Средняя линейная плотность всей проволоки $\lambda_{\text{cp}} = \frac{m}{l}$, где m – масса всей проволоки, а l – ее длина. По условию масса первой части $m_1 = \frac{m}{2} - \frac{m}{3} = \frac{m}{6}$. Откуда

$$\lambda_1 = \frac{4m}{6l} = \frac{2}{3}\lambda_{\text{cp}}, \text{ или } \lambda_{\text{cp}} = \frac{3}{2}\lambda_1 = 45 \text{ г/дм.}$$

Так как масса второй части проволоки фиксирована, то минимальная линейная плотность λ_2 достигается при максимальной длине второй части. Но она, по условию, не может превысить $3l/4$, откуда

$$\lambda_2 = \frac{4m}{9l} = \frac{4}{9}\lambda_{\text{cp}} = 20 \text{ г/дм.}$$

3. Сила давления на дно сосуда распределена равномерно по всей площади, не зависит от места погружения в жидкость тела массой $2m$ и равна

$$F = mg - F_A,$$

где F_A – сила Архимеда. Из условия равновесия погруженного тела:

$$T + F_A = 2mg,$$

где T – сила натяжения нити, условия равновесия подвешенного груза:

$$T = m_x g,$$

и правила моментов для рычага:

$$3mgl = F \cdot 2l$$

находим

$$m_x = \frac{3}{2}m.$$

4. Так как после первого уменьшения массы воды вдвое не произошло увеличения вдвое скорости роста температуры, пренебрегать теплоемкостью чайника нельзя. Запишем уравнения теплового баланса для трех случаев:

$$N\tau_1 = C_0(t_1 - t_0) + C(t_1 - t_0),$$

$$N\tau_2 = C_0(t_2 - t_1) + (C/2)(t_2 - t_1),$$

$$(N/2)\tau_3 = C_0(t_3 - t_2) + (C/4)(t_3 - t_2),$$

где C_0 и C – теплоемкости чайника и начальной массы воды соответственно, и найдем

$$\tau_3 = 4,5 \text{ мин.}$$

9 класс

1. Безопасное расстояние между машинами складывается из разности тормозных путей до полной остановки и длины участка, на котором задний автомобиль движется с постоянной скоростью до начала торможения:

$$L_1 = v\tau + \frac{v^2}{2a_1} - \frac{v^2}{2a_2}, \quad L_2 = v\tau + \frac{v^2}{2a_2} - \frac{v^2}{2a_1}.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{L_1 + L_2}{2\tau} = 25 \text{ м/с}, \quad \frac{\Delta a}{a_1 a_2} = \frac{L_2 - L_1}{v^2},$$

и $\Delta a \approx 0,12 \text{ м/с}^2$.

2. Из условия равновесия поршня $pS = Mg + p_0S$, где $p = p_0 + \rho gh$, находим

$$M = \rho hS.$$

Однако ни сечение поршня, ни сечение трубки не даны. Обратимся к связи объема налитой воды и подъема уровня. Поскольку давление воздуха в сосуде постоянно, то остается постоянной разность уровней воды справа и слева, а именно она равна h , и поэтому оба эти уровня поднимаются на y . Пока вода не попала в сосуд, $V = 2sy$, где s – сечение трубки. Этому отвечает начальная линейная часть графика, по ее наклону находим сечение трубки:

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta V}{\Delta y} \right)_{\text{нач}} = 2,5 \text{ см}^2.$$

Искривленная часть графика отвечает заполнению конической части сосуда. Когда вода дойдет до цилиндрической части, то приращение объема будет $\Delta V = S\Delta y + s\Delta y$. Это отвечает конечной линейной части графика, из ее наклона находим

$$S + s = \left(\frac{\Delta V}{\Delta y} \right)_{\text{кон}} = 35 \text{ см}^2, \text{ и } S = 32,5 \text{ см}^2.$$

Тогда

$$M = \rho h S = 650 \text{ г} .$$

Объем конической части сосуда $V_x = \Delta V - s \Delta y$, где $\Delta V = 120 \text{ см}^3$ и $\Delta y = 9 \text{ см}$ для искривленного участка графика, поэтому

$$V_x = 98 \text{ см}^3 .$$

3. Сила давления на дно сосуда распределена равномерно по всей площади, не зависит от места погружения в жидкость тела и равна

$$F = mg - F_A ,$$

где F_A – сила Архимеда. Запишем условие равновесия тела:

$$T + F_A = 2mg ,$$

где T – сила натяжения нити, условие равновесия груза:

$$T + N = m_x g ,$$

где N – сила реакции опоры, и правило моментов для рычага:

$$4mgl = Fl + N \cdot 3l .$$

Неизвестных больше, чем уравнений, и без введения дополнительных условий систему решить невозможно.

Предположим, что груз – очень легкий, тогда рычаг начнет перевешивать, его правая часть пойдет вверх и нить провиснет ($T = 0$). Решая систему уравнений, получим нижнюю границу значений массы груза: $m_x = m/3$. В случае если m_x велико, правая часть рычага начинает движение вниз, тело массой $2m$ перестает действовать на воду, сила Архимеда обращается в ноль. Тогда решение системы дает $m_x = 3m$. Итак,

$$\frac{m}{3} < m_x < 3m .$$

4. Сопротивление R цилиндров пропорционально их длине l и их теплоемкости C , поэтому

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{R_{01}}{R_{02}} .$$

С учетом этого из уравнения теплового баланса

$$C_1 t_1 + C_2 t_2 = (C_1 + C_2) t$$

получим

$$t = \frac{C_1 t_1 + C_2 t_2}{C_1 + C_2} = \frac{R_{01} t_1 + R_{02} t_2}{R_{01} + R_{02}} .$$

Теперь найдем изменения температуры:

$$\Delta t_1 = t - t_1 = \frac{R_{02} (t_2 - t_1)}{R_{01} + R_{02}} ,$$

$$\Delta t_2 = t - t_2 = \frac{R_{01} (t_1 - t_2)}{R_{01} + R_{02}}$$

и изменения сопротивлений цилиндров:

$$\Delta R_1 = R_{01} \beta \Delta t_1 = \beta (t_2 - t_1) \frac{R_{01} R_{02}}{R_{01} + R_{02}} ,$$

$$\Delta R_2 = R_{02} \beta \Delta t_2 = \beta (t_1 - t_2) \frac{R_{01} R_{02}}{R_{01} + R_{02}} .$$

Видно, что изменение сопротивления составного цилиндра равно нулю:

$$\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2 = 0 .$$

Следовательно, сопротивление составного цилиндра при нагреве не изменится и будет равно

$$R = R_1 + R_2 .$$

5. а) На рисунке 14 приведена эквивалентная схема цепи для этого случая. Сила тока, текуще-

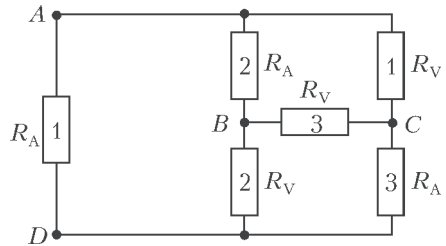


Рис. 14

го через амперметр, подключенный к точкам A и D , равна $I_{AD} = U_0 / R_A = 15 \text{ А}$. Поскольку $R_A \ll R_V$, при расчете силы токов, текущих через вольтметры, сопротивлением амперметров можно пренебречь. Тогда

$$U_{AC} = U_{BC} = U_{BD} = U_0 = 1,5 \text{ В} ,$$

$$I_{AC} = I_{BC} = I_{BD} = U_0 / R_V = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ А} ,$$

$$I_{AB} = I_{BC} + I_{BD} = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ А} ,$$

$$I_{CD} = I_{BC} + I_{AC} = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ А} .$$

б). На рисунке 15 приведена эквивалентная схема цепи для этого случая. Напряжение на вольтметре, подключенном к точкам B и C , равно $U_{BC} = U_0 = 1,5 \text{ В}$. Тогда

$$I_{BA} = I_{AD} = I_{DC} = U_0 / (3R_A) = 5,0 \text{ А} ,$$

$$U_{BD} = U_{BA} + U_{AD} = 2R_A I_{BA} = 1,0 \text{ В} ,$$

$$U_{AC} = U_{AD} + U_{DC} = 2R_A I_{DC} = 1,0 \text{ В} .$$

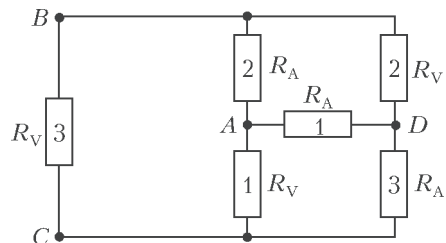


Рис. 15

10 класс

1. Рассмотрим векторы начальных скоростей бруска и фанеры и их изменения за некоторый малый промежуток времени Δt . На рисунке 16 вектор \overline{OA} соответствует скорости бруска, вектор \overline{OB} – скорости фанеры в начальный момент времени. Векторы изменений их скоростей $\Delta \vec{v}$ равны по модулю (так как массы равны) и направлены вдоль вектора их относительной скорости. Через время Δt концы векторов новых скоростей $\overline{OA_1}$ и $\overline{OB_1}$ по-прежнему лежат на AB и силы трения, действующие на тела, направлены вдоль AB . Скорости бруска и фанеры будут изменяться до тех пор, пока не выровняются по величине и направлению, а точки A_1 и B_1 не окажутся на середине AB . Дальнейшее очевидно из геометрии (рис. 17). Скорость бруска уменьшается, пока не достигнет постоянного значения, равного

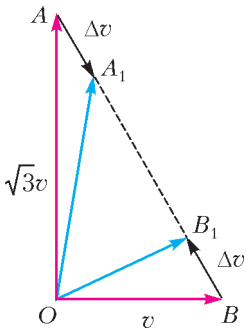


Рис. 16

$OM = AB/2 = v$. Минимальная скорость листа фанеры достигается прежде, чем скорости установятся, она равна $OB_2 = OA \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3}v/2$.

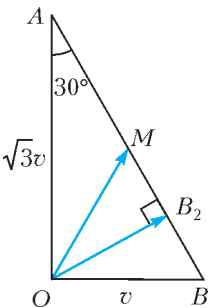


Рис. 17

2. После первого столкновения скорость правого бруска $u_1 = 2mv/(M + m) = v/2$, скорость тележки

$v_1 = v(m - M)/(M + m) = -v/2$, знак минус означает, что тележка начнет двигаться влево. После столкновения с левым бруском тележка будет двигаться вправо со скоростью $v/4$, а скорость правого бруска после второго столкновения с тележкой станет $v_2 = v/8 = v_1/4$. Соответственно, $v_3 = v_2/4$ и т.д. Кинетические энергии правого бруска будут изменяться также в геометрической прогрессии, но со знаменателем $1/16$. Можно заметить, что после каждого столкновения отношение кинетических энергий правого и левого брусков остается одинаковым и равным 4, тогда $L_n = L_{n+1}/4$. С учетом работы силы трения имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \mu Mg(L_n + L_{n+1}),$$

а так как $m = M/3$, то получаем

$$L_n = \frac{2v^2}{15\mu g} \text{ и } L_{n+1} = \frac{v^2}{30\mu g}.$$

3. Массу пузырька воздуха можно не учитывать, поэтому сила сопротивления движению равна силе Архимеда:

$$F = F_A, \text{ или } krv = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g,$$

откуда

$$v = \frac{4\pi r^2 \rho g}{3k}.$$

В соответствии с законом Бойля–Мариотта,

$$\frac{4\pi}{3}r_0^3(p_0 + \rho gh_0) = \frac{4\pi}{3}r^3(p_0 + \rho gh),$$

$$\text{или } r = r_0 \left(\frac{p_0 + \rho gh_0}{p_0 + \rho gh} \right)^{1/3}.$$

Таким образом,

$$v = \frac{4\pi \rho g r_0^2}{3k} \left(\frac{p_0 + \rho gh_0}{p_0 + \rho gh} \right)^{2/3},$$

и скорости пузырька вблизи дна $v(h_0)$ и у поверхности $v(0)$ относятся как

$$\frac{v(0)}{v(h_0)} = \left(\frac{p_0 + \rho gh_0}{p_0} \right)^{2/3}.$$

Отношение скоростей можно определить через отношение угловых коэффициентов касательных, проведенных к графику зависимости $h(t)$ в соответствующих точках. Для нашего графика (данного в условии)

$$\frac{v(0)}{v(h_0)} \approx 1,8, \quad \frac{p_0 + \rho gh_0}{p_0} \approx 2,4, \text{ и } h_0 \approx 14 \text{ м}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи достаточно заметить, что на любой глубине скорость пузырька пропорциональна квадрату его начального радиуса. Соответственно, для пузырька с начальным радиусом 0,5 мм скорость будет в четыре раза меньше, чем для пузырька радиусом 1 мм, а время движения будет в четыре раза больше, т.е. $\tau_1 \approx 18$ с.

При ответе на третий вопрос задачи сначала найдем радиус пузырька, имевшего $r_0 = 1$ мм на глубине 20 м, когда он достигнет глубины 10 м:

$$r'_0 = r_0 \left(\frac{p_0 + \rho gh_0}{p_0 + \rho gh} \right)^{1/3} = r_0 \left(\frac{24}{20} \right)^{1/3}.$$

Такой же пузырек, в соответствии с графиком, движется от глубины 10 м до поверхности время $t' = 1,9$ с. Пузырек, имеющий на этой глубине

радиус $r_0 = 1$ мм, будет двигаться в $\left(\frac{r'_0}{r_0} \right)^2$ раз

медленнее, т.е. достигнет поверхности за время

$$\tau_2 = t' \left(\frac{r'_0}{r_0} \right)^2 \approx 3,3 \text{ с.}$$

4. Пусть S – сечение цилиндров, v – полное число молей газа, R – универсальная газовая постоянная. Из уравнения состояния идеального газа для начальной ситуации имеем

$$2p_0SL = \nu RT_0.$$

При открытом кране давление газа слева и справа одинаково, обозначим его p . Тогда

$$pSL = \nu_1 RT_0, \quad pSL = \nu_2 RT_0,$$

где ν_1 и ν_2 – число молей слева и справа. Так как суммарное число молей неизменно, то $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Отсюда

$$p = \frac{2p_0T}{T + T_0}.$$

После закрытия крана число молей газа слева и справа остаются прежними. В конце температура везде T_0 , а объемы газа слева и справа – соответственно $(L+h)S$ и $(L-h)S$. Разница давлений газа при перепаде уровней

$$p_1 - p_2 = 2\rho gh.$$

Выразим давления через уравнение состояния и предыдущие соотношения:

$$\begin{aligned} \nu_1 RT_0 / ((L+h)S) - \nu_2 RT_0 / ((L-h)S) = \\ = pL / (L+h) - pL / (L-h) = 2\rho gh. \end{aligned}$$

Подставив $p = 2p_0T / (T + T_0)$, получим уравнение для искомой величины T :

$$\frac{p_0LT}{(T + T_0)(L+h)} - \frac{p_0LT_0}{(T + T_0)(L-h)} = \rho gh.$$

Отсюда

$$T = T_0 \frac{(L+h)(p_0L + \rho gh(L-h))}{(L-h)(p_0L - \rho gh(L+h))}.$$

5. Каждый диод может быть открыт или закрыт. Всего возможны три варианта: а) оба диоды закрыты; б) один диод закрыт (например, D_1), другой (D_2) открыт; в) оба диоды открыты.

Случай а): $U_{AD} = U_{DC} = U_{CB} = U_{AB}/3$, $U_{AC} = U_{AD} + U_{DC} > U_0$ – не подходит.

Случай б): $U_{DB} = 1 \text{ В}$, $U_{DC} = U_{CB} = 0,5 \text{ В}$, $U_{AC} = 4,5 \text{ В} > U_0$ – не подходит.

Случай в): $U_{AC} = U_{AD} = U_0 = 1 \text{ В}$.

Тогда

$$U_{H_1} = U_{H_3} = U_{AB} - U_0 = 4 \text{ В},$$

$$U_{H_2} = U_{AB} - 2U_0 = 3 \text{ В},$$

$$I_{D_1} = I_{D_2} = I_{H_3} + I_{H_2} = kU_{H_3}^2 + kU_{H_2}^2 = 2,5 \text{ А}.$$

11 класс

1. Пусть в результате удара через стержень передается импульс $p = \int F(t)dt$, где F – сила упругости. Запишем изменение импульса для муфт A и C :

$$mv - p \sin \alpha = 3mv_{AC}.$$

Тогда изменение импульса для муфты B равно

$$p \cos \alpha = 3mv_B.$$

Из кинематической связи следует

$$v_{AC} \operatorname{tg} \alpha = v_B.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем

$$v_{AC} = v \frac{\cos^2 \alpha}{3}, \quad v_B = v \frac{\sin 2\alpha}{6}.$$

2. При отсутствии трения натяжение любого участка ленты одинаково по величине: $T = F$. Если сила давления на ленту со стороны цилиндра – \vec{N} , а \vec{T}_1 и \vec{T}_2 – натяжения ленты справа и слева от обхватывающего цилиндра участка, то $\vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$ – при пренебрежимо малой массе этого участка сумма векторов сил, приложенных к нему, равна нулю. В момент отрыва цилиндра от ленты $\vec{N} = 0$ и $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$. Так как натяжение направлено вдоль ленты, то отрыв цилиндра от ленты происходит в момент, когда вся лента становится горизонтальной. При переходе в горизонтальное положение свободный конец ленты смещается по горизонтали на $x = R(1 - \cos \alpha)$, а сила \vec{F} совершает работу $A = Fx = FR(1 - \cos \alpha)$. Эта работа идет на приращение механической энергии цилиндра:

$$FR(1 - \cos \alpha) = \frac{mv^2}{2} + mgR \sin \alpha,$$

откуда находим

$$v = \sqrt{2R \left(\frac{F(1 - \cos \alpha)}{m} - g \sin \alpha \right)}.$$

Ответ имеет смысл, если подкоренное выражение положительно.

3. Для начального состояния газов в сосудах можно записать уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$\frac{p_0(V + LS/2)}{T_0} = \nu R, \quad \text{где } V + LS/2 = V_0.$$

Если температура в левом сосуде повысится на ΔT_1 , а в правом понизится на ΔT_2 и поршень сместится влево на ΔL , то новые уравнения состояния примут вид

$$\frac{p(V_0 + \Delta LS)}{T_0 + \Delta T_1} = \nu R \quad \text{и} \quad \frac{p(V_0 - \Delta LS)}{T_0 - \Delta T_2} = \nu R.$$

Отсюда с учетом $\Delta LS \ll V$ получим

$$\Delta L = \frac{V_0 (\Delta T_1 + \Delta T_2)}{2ST_0} = \frac{V_0 \Delta T}{2ST_0}.$$

Из этого уравнения следует, что при малых изменениях температур сосудов малые смещения поршня связаны линейно с разностью температур ΔT . Заметим, что 4-у делению шкалы термометра соответствует отметка 9 см на линейке. Следовательно, цена деления шкалы

$$\Delta T_{\text{дел}} = \frac{2ST_0 \Delta L_1}{V + LS/2} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 300 \cdot 0,02}{10^{-3} + 1,5 \cdot 10^{-4}} \text{ К} \approx 1,2 \text{ К}.$$

4. Запишем условие равновесия заряда на конце нити в проекции на направление, перпендикулярное нити (рис.18):

$$\frac{qQ_1 \sin \alpha_1}{R_1^2} = \frac{qQ_2 \sin \alpha_2}{R_2^2}.$$

Связав R_1 , R_2 , α_1 и α_2 с известными расстоя-

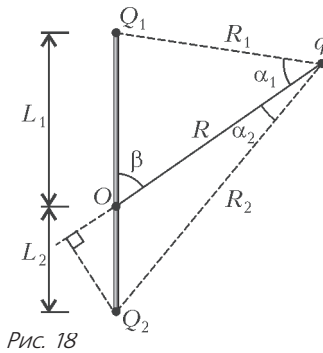


Рис. 18

ниями L_1 и L_2 , и углом β , находим

$$Q_1 = Q_2 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \left(\frac{R^2 + L_1^2 - 2RL_1 \cos \beta}{R^2 + L_2^2 + 2RL_2 \cos \beta} \right)^{3/2}.$$

При нити, отклоненной от прямой, соединяющей заряды Q_1 и Q_2 , равновесие устойчиво, так как с изменением β возникнет возвращающая сила. При $\beta = 0$ и $\beta = 180^\circ$ равновесие будет при любом Q_1 , но оно не обязательно устойчиво. Минимальный измеряемый заряд Q_{\min} достигается при $\beta \rightarrow 0$, а максимальный Q_{\max} – при $\beta \rightarrow 180^\circ$. При указанных в условии значениях L_1 и R получим

$$Q_{\min} = \frac{1}{128} Q_2 \text{ и } Q_{\max} \geq \frac{10^3}{128} Q_2 = \frac{125}{16} Q_2.$$

5. 1) Три пластины представляют собой два последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ и $C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2d}$ и зарядом q . Из

закона сохранения энергии

$$\frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$$

найдем

$$I_{\max} = q \sqrt{\frac{3d}{\epsilon_0 SL}}.$$

2) Верхний конденсатор можно представить как два соединенных параллельно конденсатора емкостями $\frac{\epsilon \epsilon_0 S/2}{d}$ и $\frac{\epsilon_0 S/2}{d}$. Их суммарная емкость равна $\frac{\epsilon_0 S}{2d} (1 + \epsilon)$. Записав закон сохранения энергии, получим

$$I_{\max} = q \sqrt{\frac{2d}{\epsilon_0 SL} \frac{2 + \epsilon}{1 + \epsilon}}.$$

КВАНТ

12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ
**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: (495) 363-48-86,

http://capitalpress.ru

Искусственный интеллект УЧИТСЯ ИГРАТЬ В ШАХМАТЫ

(Начало см. на с. 39)

Разработчики выложили в открытый доступ 50 партий, сыгранных программой самой с собой, и они стали настоящим учебником игры в го, особенно в плане дебютной теории. Кэ Цзэ, опираясь на разработки AlphaGo, радикально изменил свой стиль игры в дебюте и поставил личный рекорд, выиграв 22 партии подряд в профессиональных турнирах.

5 декабря 2017 года коллектив сотрудников DeepMind опубликовал в интернете статью, в которой сообщалось, что они обучили AlphaZero правилам шахмат, после чего заставили нейронную сеть играть саму с собой в течение девяти часов. Сначала она делала случайные ходы, потом убирала из поиска неудачные и постепенно училась играть все сильнее и сильнее, достигнув невероятного уровня игры.

Принципиальное отличие алгоритма, используемого AlphaZero, видно в количестве позиций, оцениваемых в секунду: 80 тысяч против 70 миллионов у Stockfish, что показывает умение программы отсекаать в своих расчетах ненужные варианты. По сути, AlphaZero представляет собой искусственный интеллект, над созданием которого трудился еще в 1970-80-х годах великий советский шахматист Михаил Ботвинник, разрабатывая шахматную программу «Пионер».

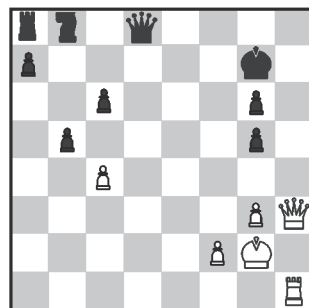
Сам факт победы AlphaZero не стоит переоценивать, поскольку в демонстрационном матче две программы играли на совсем разном оборудовании. Stockfish работал на обычном 64-ядерном процессоре, а

AlphaZero – на 4-х тензорных процессорах, созданных Google специально для машинного обучения. Также к программам не были подключены дебютные базы (что ослабило, в первую очередь, Stockfish, так как AlphaZero сама накапливает ее по мере обучения), а лимит времени составлял минуту на ход, что более критично для Stockfish, ведущей пересчет большего числа вариантов. Полный список партий с нотацией можно найти в интернете, а мы рассмотрим лишь одну из них.

AlphaZero – Stockfish 8

1. ♖f3 ♗f6 2. d4 e6 3. c4 b6 4. g3 ♜b7 5. ♗g2 ♜e7 6. 0-0 0-0 7. d5 ed. Принципиальный вариант новиндской защиты, который несколько раз встретился в матче и вызвал философский вопрос у комментировавших партии гроссмейстеров: почему машина предпочитает играть гамбит? 8. ♖h4 c6 9. cd ♗d5 10. ♗f5 ♜c7 11. e4 d5 12. ed ♗d5 13. ♗c3 ♜c3 14. ♝g4. Дебютная новинка, до этого белые сразу брали коня на c3, и партии заканчивались вничью. 14... g6 15. ♗h6+ ♜g7 16. bc ♗c8 17. ♝f4 ♜d6 18. ♝a4. Маневры ферзя трудно объяснить человеческой логикой – возможно, AlphaZero провоцирует своего соперника на выигрыш коня за счет ослабления позиции короля. 18... g5 19. ♝e1 ♜h6 20. h4 f6 21. ♗e3. Белые просто развивают фигуры, пользуясь позиционным перевесом. 21... ♗f5 22. ♗ad1 ♜a3 23. ♝c4 b5 24. hg+ fg 25. ♝h4+ ♜g6 26. ♝h1! Любое другое отступление ферзя ведет к размену, поэтому он временно прячется в углу. 26... ♜g7 27. ♗e4!? ♗g6 28. ♗g6 hg 29. ♝h3!? Белые упорно избегают повторения ходов, поскольку явно играют на победу. 29... ♗f6 30. ♝g2 ♜a2 31. ♝h1 ♜g8 32. c4!! Перекрытие от возможного

шаха ферзем с a2. 32... ♜e8 33. ♗d4! Белые разменивают последнюю легкую фигуру ради уничтожения защитника. 33... ♜d4 34. ♝d4 ♜d8? Решающая ошибка. При более глубоком анализе на Stockfish 8 этот ход не входит даже в первую тройку ходов-кандидатов (лучше 34...bc, 34... ♜e6, 34... ♜e5, 34...b4), что позволяет говорить о не лучших настройках программы для этого матча. 35. ♝d8 ♜d8.



Торжество позиции белых. У них не хватает коня и двух пешек, однако позиция выиграна вследствие критической неразвитости ферзевого фланга черных. 36. ♝e6 ♗d7 37. ♝d1 ♗c5 38. ♝d8 ♗e6 39. ♝a8, и впоследствии белые технично реализовали лишнее качество в эндшпиле. Выигрыш белых.

Пока трудно предположить, какую практическую пользу может принести шахматистам создание такого искусственного интеллекта. Вряд ли эта разработка в ближайшем времени станет доступна обычным любителям шахмат на компьютерах или смартфонах. Сам же искусственный интеллект – очень сложный и дорогостоящий проект. Победы над сильнейшими белковыми игроками скорее являются презентацией его возможностей, которые должны использоваться для решения более глобальных задач человечества.

А.Русанов

Индекс 90964

Продукты с розичкой

МЕЖДУ ЛЕТОМ И ЗИМОЙ

На полях уже полностью стаял снег, а в ложбинках,
по которым текут ручьи, формируются невероятно крупные
кристаллы льда...

